Numerical

Curve Fitting توفيق المنحنيات

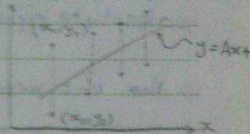
LEC. 1

Introduction :

← الدرس دا لإيجاد خط تقع عليه مجموعة من النقط المعلومة

← يهتم توفيق المنحنيات بتعيين صورة المنحنى في خط مستقيم (منحنى درجة ثانية أو ثالثة) يمر بنقط معينة في جدول بحيث أن النقط قريبة جداً منه فيمكن من خلال هذه الفكرة استنتاج قيم مفقودة في الجدول أو نقط غير واضحة في الجدول " فكرة تصحيح النقط "

x	x_1	x_2	------	x_n
y	y_1	y_2	------	y_n



$$\left.\begin{aligned} y &= Ax + b \\ y_1 &= Ax_1 + b \\ y_2 &= Ax_2 + b \\ &\vdots \\ y_n &= Ax_n + b \end{aligned}\right\} \circledast$$

by adding $\circledast$:
$$\sum_{i=1}^{n} y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i + nb \qquad (1)$$

multiplying $\circledast$ by x :

$$\left.\begin{aligned} xy &= ax^2 + bx \\ x_1 y_1 &= ax_1^2 + bx_1 \\ x_2 y_2 &= ax_2^2 + bx_2 \\ &\vdots \\ x_n y_n &= ax_n^2 + bx_n \end{aligned}\right\} \circledast\circledast$$

by adding $\circledast\circledast$:
$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (2)$$

التسهيل

نجمع واللى مفيهوش x نضربه فى n تطلع معادلة نضرب رأسيا فى x ونجمعها

$$\Rightarrow \sum y_i = a \sum x_i + nb$$

$$\Rightarrow \sum x_i y_i = a \sum x_i^2 + b \sum x_i$$

$$\Rightarrow \text{absolute error} = \left| y_{exact} - y_{approx.} \right|$$

$$\Rightarrow \text{the root meen square of error} = \sqrt{\frac{\sum D^2}{n}}$$

ex Deduce the form of curve fitting formula for:

$$y = ax + b$$

Solution

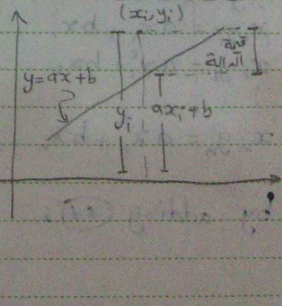
x	x_1	x_2	----	x_n
y	y_1	y_2	----	y_n

الفكرة مبنية على انه اذا وجد جدول من data بين متغيرين x و y ومطلوب ان يمر الخط المستقيم بمعظم نقط الجدول والنقطة التى لا يمر بها تكون قريبة جداً منها ، نحاول تكوين دالة رياضية توصف هذه العملية

← لو عرفت اخلى $y_i - ax_i - b$ اقل ما يمكن هنوصل للدالة بتاعتنا "انظر الرسم".

← تكون دالة عبارة عن مجموع مربع المسافة بين النقط والخط ونجعل الدالة اقل ما يمكن (min)

$$\Phi = \sum \left[y_i - (ax_i + b) \right]^2$$



$$\frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0$$

ينتج عنها قيم حرجة.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b} = \sum \underbrace{\cancel{2}}_{\text{الطرف الثاني صفر}} \left[y_i - ax_i - b \right] \underbrace{(\cancel{-1})}_{\text{لأن الناحية التانية صفر}} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - nb = 0 \qquad \text{where } \sum_{i=1}^{n} b = nb$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb \quad \text{①}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = \sum \cancel{2}\,[y_i - a x_i - b]\,(-x_i) = 0$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{②}$$

ex. Fit the curve $y = a + bx$ from

x	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	0.31	0.82	1.29	1.85	2.51	3.02

then find the root mean square of errors

Solution

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	
0.5	0.31	0.25	0.155	
1	0.82	1	0.82	
1.5	1.29	2.25	1.935	
2	1.85	4	3.7	
2.5	2.51	6.25	6.275	
3	3.02	9	9.06	
10.5	9.8	22.75	21.945	SUM

① اختار stat
② اختار A+Bx
③ ندخل قيم الجدول
④ shift+1
⑤ اختار SUM

$9.8 = 6a + 10.5b$ ①

$22.75 = 10.5a + 21.945b$ ②

solving ① & ②:

$a = -0.285$, $b = 1.096$

Page:
Date:

$\therefore$ The eqn is:

$$y = -0.285 + 1.096\,x \Rightarrow \#_1$$

جميع نقط هذا الجدول تسمى y_{exact} وجميع قيم ال y المحسوبة من على الخط تسمى y_{approx}

x_i	y_{exact}	y_{app}	error
0.5	0.31	$-0.285+(1.096*0.5)$	0.0022
1	0.82	$-0.285+(1.096*1)$	0.00081
1.5	1.29	⋮	0.00476
2	1.85	⋮	0.003249
2.5	2.51	⋮	0.003025
3	3.02	$-0.285+(1.096*3)$	0.000289
			0.013605 ΣD^2

root meen square of errors $= \sqrt{\dfrac{\Sigma D^2}{n}} = \sqrt{\dfrac{0.013605}{6}} = \#_2$

where error $= D^2 = \left| y_{exact} - y_{approx} \right|^2$

* الأفكار في هذا الجزء تكون في تغيير شكل معادلة المنحنى ويمكن التغلب عليها بوضع متغير جديد داخل هذه المعادلة حتى نصل الى صورة الخط $y=ax+b$ أو $y=a+b$

الأفكار

$\boxed{1}$ $y = Cx^m$

$Lny = Ln\,C + Ln\,x^m$

$Lny = Ln\,C + m\,Ln\,x$

Let $Y = Lny$, $X = Ln\,x$, $A = Ln\,C$

$$\therefore Y = A + mX$$

K.M.S

Page :
Date :

$$\sum Y_i = nA + m \sum X_i$$

$$, \sum X_i Y_i = A \sum X_i + m \sum X_i^2$$

ونعمل جدول جديد بالمتغيرات الجديدة بتاعتنا

$\boxed{2}$ $y = a + b x^p$, $P \rightarrow$ رقم أو كسر

let $X = x^p$ $\therefore y = a + bX$

$$\sum y_i = na + b \sum X_i$$

$$, \sum X_i y_i = a \sum X_i + b \sum X_i^2$$

ونعمل جدول جديد بالمتغيرات الجديدة بتاعتنا

$\boxed{3}$ $y = \dfrac{x}{a + bx}$

$$\frac{1}{y} = \frac{a + bx}{x} \qquad \therefore \frac{1}{y} = a\left(\frac{1}{x}\right) + b$$

let $Y = \frac{1}{y}$, $X = \frac{1}{x}$

$$\therefore Y = aX + b$$

$$\sum Y_i = a \sum X_i + nb$$

$$\sum X_i Y_i = a \sum X_i^2 + b \sum X_i^2$$

ملاحظة

$$y = \frac{x}{a + bx}$$

$$\frac{x}{y} = a + bx$$

$$Y = a + bx$$

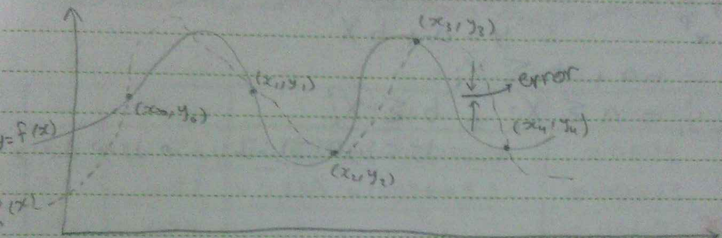
$\vdots$

Interpolation الاستنباط.

Page: LEC. 2
Date:

من جدول النقط معطاه لدالة $f(x)$ يمكن تعيين كثيرة الحدود التى تشترك مع الدالة فى نقط الجدول

x	x_0	x_1	------	x_n
y	y_0	y_1	------	y_n



نوجد كثيرة الحدود التى تشترك مع الدالة فى نقط الجدول بين هذه النقط يوجد خطأ فى الحساب الناتج عن أن الدالتين مش زى بعض فى ~~المنحنى~~ الأماكن بين النقط.

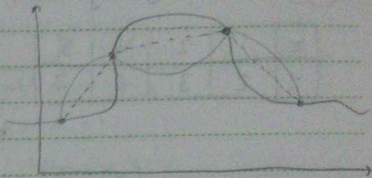
جدول النقط

فترات غير متساوية	فترات متساوية
⇒ Lagrange method	⇒ Newton's forward
⇒ Newton's devided method	⇒ Newton's backward
	⇒ Gauss forward
	⇒ Gauss backward
	⇒ Strilling

* Spline analysis:

a) Linear Spline:

لو وصلت بين نقط الجدول بخط مستقيم
الـ error فيه عالى



b) Qudratic Spline:

اوصل بين كل نقطتين بمنحنى درجة ثانية

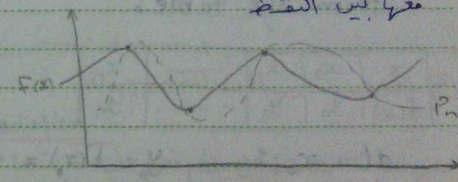
c) Cubic Spline:

اوصل بين كل نقطتين بمنحنى درجة ثالثة

* Lagrange method:

المطلوب تعيين كثيرة الحدود $P_n(x)$ تشترك مع الدالة فى نقط الجدول و تختلف معها بين النقط

x	x_0	x_1	----	x_n
y	y_0	y_1	----	y_n



$$P_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} y_1$$

$$+ \text{------} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})} y_n \quad \#$$

{ex.} use lagrange method to find $P_n(x)$ from

x	1	2	4	5
y	2	3	6	7

Solution

$$P_n(x) = \frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(1-2)(1-4)(1-5)}(2) + \frac{(x-1)(x-4)(x-5)}{(2-1)(2-4)(2-5)}(3)$$

$$+ \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(4-1)(4-2)(4-5)}(6) + \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(5-1)(5-2)(5-4)}(7)$$

(*) Lagrange Polynomial Deduction:

from the table:

x	x_0	x_1	------	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	------	y_n

at x_0 : $y_0 = f(x_0) = P_n(x_0)$

at x_1 : $y_1 = f(x_1) = P_n(x_1)$

⋮

at x_n : $y_n = f(x_n) = P_n(x_n)$

$$P_n(x) = C_0 (x-x_1)(x-x_2) \cdots (x-x_n)$$
$$+ C_1 (x-x_0)(x-x_2) \cdots (x-x_n)$$
$$+ \cdots + C_n (x-x_0)(x-x_0) \cdots (x-x_{n-1}) \Rightarrow (*)$$

at $x = x_0$:

$$P_n(x_0) = y_0 = C_0 (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)$$

$$\therefore C_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)}$$

at $x = x_1$:

$$P_n(x_1) = y_1 = C_1 (x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_n)$$

$$\therefore C_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_n)}$$

$$\therefore C_n = \frac{y_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})}$$

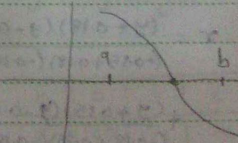
$$\boxed{\therefore P_n(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_n)} y_0 + \cdots + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1})} y_n}$$

* إيجاد جذور المعادلة $f(x)=0$ باستخدام Lagrange :

solution

جذور المعادلة هي النقط التي يقطع فيها منحنى المعادلة عندها محور السينات (اشارتها تختلف).

$f(x) = 0$ → put $y = f(x)$



* نجيب قيمة الدالة عند $\frac{a+b}{2}$ يبقى عندنا احتمالين:

- اشارتها زى a ← الجذر ناحية b
- اشارتها زى b ← الجذر ناحية a

اعمل جدول على الفترة من a إلى b بقيم صغيرة

x	x_0	x_1	x_2	x_3
y	y_0	y_1	y_2	y_3

نقلب الجدول تاعنا ونشتغل lagrange بالمقلوب :

$$x = P_n(y) = \frac{(y-y_1)(y-y_2)\cdots(y-y_n)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)\cdots(y_0-y_n)}x_0 + \text{------} +$$

$$\frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_2)}{(y_3-y_0)(y_3-y_1)(y_3-y_2)}$$

put $y=0 \Longrightarrow x = \text{root}$

ex. use lagrange polynomial to find the root of:

$$e^x - 2 = 0$$

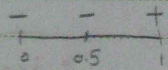
Solution

$f(x) = e^x - 2$

$f(0) = -1$ +ve

$f(1) = e^1 - 2 = 0.7$ -ve

$f(0.5) = e^{0.5} - 2 = -0.35$ -ve



x	0.5	0.6	0.7	1
y	-0.35	-0.18	0.04	0.7

$$x = \frac{(y+0.18)(y-0.014)(y-0.7)}{(-0.35+0.18)(-0.35-0.014)(-0.35-0.7)}(0.5)$$

$$+\frac{(y+0.35)(y-0.014)(y-0.7)}{(-0.18+0.35)(-0.18-0.014)(-0.18-0.7)}(0.6)$$

$$+\frac{(y+0.18)(y+0.35)(y-0.7)}{(0.014+0.18)(0.014+0.35)(0.014-0.7)}(0.7)$$

$$+\frac{(y+0.35)(y+0.18)(y-0.014)}{(0.7+0.35)(0.7+0.18)(0.7-0.014)}(1)$$

put $y=0 \Rightarrow x = \text{root} \Rightarrow$ #

Page :
Date :

ملحوظة

اذا اعطالك دالة مثلثية لابد من تحويل x لزاوية من المعادلة $\frac{x}{\pi} = \frac{\theta}{180}$

Error of Lagrange:

الخطأ الناتج من حساب كثيرة الحدود بطريقة لاجرانج يحسب عند قيم موجودة بين نقط الجدول تسمى truncation error :

$$\boxed{|error| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left|(x-x_0)(x-x_1) \cdots (x-x_n)\right|}$$

← حيث n عدد خانات الجدول.

← كل ما ازود n يكبر المقام في القانون و يقل ال error.

$$\Rightarrow M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} \left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

المشتقة n+1 الدالة

حيث M_{n+1} هي اعلى قيمة للمشتقة (n+1) للدالة وذلك بأن نعوض بقيم x التي في الجدول في المشتقة (n+1) ونأخذ اكبر هذه القيم.

ex. Find the error of calculating $\sqrt{115}$ by Lagrange if $x_0 = 100$, $x_1 = 121$, $x_2 = 144$

solution

n	0	1	2
x	100	121	144
$\sqrt{x}$	10	11	12
$f^{(3)}(x)$	✓	✓	✓

$$|error| \leq \frac{M_3}{3!} \left|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\right|$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-5/2} \quad \text{where } f(x) = \sqrt{x}$$

$$M_3 = \frac{3}{8} * (100)^{-5/2} \quad , \quad x = 115$$

$$|error| \leq \frac{3 * (100)^{-5/2}}{8 * 3!} \left|(115-100)(115-121)(115-144)\right| = \checkmark$$

K.M.S

* Curve fitting:

1) Least Square Method:

Given:

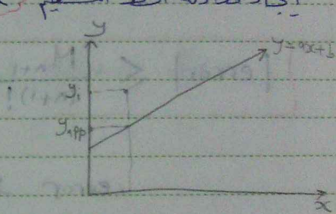
x	x_1	x_2	---	x_n
y	y_1	y_2	---	y_n

Req:

إيجاد معادلة الخط المستقيم $y=a+bx$ المار تقريباً بجميع نقط الجدول .

Solution:

x	y	x^2	xy
$\sum x$	$\sum y$	$\sum x^2$	$\sum yx$



$$\boxed{\begin{aligned} \sum y_i &= na + b\sum x_i \\ \sum x_i y_i &= a\sum x_i + b\sum x_i^2 \end{aligned}} \Rightarrow \text{حفظ}$$

$D_i = y_i$ (من الجدول) $- \; y_{app}$ (عوض عن x في معادلة الخط المستقيم)

$$\text{root mean square of error} = \sqrt{\frac{\sum D_i^2}{n}}$$

$n \leftarrow$ عدد النقط من الجدول

Ideas

Given

معادلة منحنى تحتوى على a , b .

Req

Curve fitting

Solution

$$y = \square + \square x$$

$\boxed{1}$ $y = a x^{b}$

$\ln y = \ln a + b \ln x$

$Y = A + bX$

$$\sum Y = nA + b \sum X$$
$$\sum XY = A \sum X + b \sum X^2$$

$\boxed{2}$ $y = a + b x$ دالة

$Y = a + bX$

$\boxed{3}$ $y = a e^{bx}$

$\ln y = \ln a + bx$

$Y = A + bx$

$\boxed{4}$ $y = a b^{x}$

$\ln y = \ln a + x \ln b$

$Y = A + Bx$

K.M.

$\boxed{5}$ $y = \dfrac{x}{a+bx}$ $\qquad\qquad \dfrac{1}{y} = \dfrac{a+bx}{x}$

$$\frac{1}{y} = a\frac{1}{x} + b$$

$$Y = aX + b$$

ملحوظة

نحسب B, A

ومنهم ناخد a , b

$\boxed{6}$ $y = \dfrac{1}{a + b\cos x}$

$$\frac{1}{y} = a + b\cos x$$

$$Y = a + bX$$

2) Interpolation:

Given

x	x_0	x_1	$\rightarrow$	x_n
y	y_0	y_1	$\rightarrow$	y_n

عدد نقاط الجدول $= n+1$

Req

تعيين دالة كثيرة الحدود polynomeal f_n تمر بين جميع النقط في الجدول $P_n(x)$

Solution

Lagrange Interpolation Formula:

$$P_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}y_0 + \cdots\cdots +$$

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}y_n$$

K.M.S

Interpolation With Unequal Devided:

Newton's Divided Difference:

تستخدم هذه الطريقة لتعيين كثيرة حدود من جداول حدود x فيها غير متساوية

x	x_0	x_1	x_2	x_3
$y=f(x)$	y_0	y_1	y_2	y_3

$$P_n(x) = y_0 + (x-x_0)f(x_0,x_1) + (x-x_0)(x-x_1)f(x_0,x_1,x_2)$$
$$+ \cdots + (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f(x_0,x_1,\ldots,x_n)$$

مناقش افرقوس

x	y	$f(x_0,x_1)$	$f(x_0,x_1,x_2)$	$f(x_0,x_1,x_2,x_3)$
x_0	y_0			
		$f(x_0,x_1) = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$		
x_1	y_1		$f(x_0,x_1,x_2) = \frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2-x_0}$	
		$f(x_1,x_2) = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$		$\frac{f(x_1,x_2,x_3)-f(x_0,x_1,x_2)}{x_3-x_0}$
x_2	y_2		$f(x_1,x_2,x_3) = \frac{f(x_2,x_3)-f(x_1,x_2)}{x_3-x_1}$	
		$f(x_2,x_3) = \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$		
x_3	y_3			

ex. Use Newton's devided difference to find $P_n(x)$ from:

x	0	1	3	6
y	2	6	10	12

Solution

x	y	$f(x_0,x_1)$	$f(x_0,x_1,x_2)$	$F(x_0,x_1,x_2,x_3)$
0	2			
		4		
1	6		$\frac{2-4}{3-0} = \frac{-2}{3}$	
		2		$\frac{\frac{-4}{15}+\frac{2}{3}}{6-0} = \frac{1}{15}$
3	10		$\frac{\frac{2}{3}-2}{6-1} = \frac{-4}{15}$	
		$\frac{2}{3}$		
6	12			

Page :
Date :

$$P_n(x) = 2 + (x-0)(4) + (x-0)(x-1)\left(\frac{-2}{3}\right) + (x-0)(x-1)(x-3)\left(\frac{1}{15}\right)$$

☒ Deduce the form of Newton's devided Formula:

$$P_n(x) = y_0 + (x-x_0)\, f(x_0,x_1) + (x-x_0)(x-x_1)\, f(x_0,x_1,x_2) + \cdots$$

where $f(x_i, x_{i+1}) = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$

, $f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \dfrac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}$

, $y_i = f(x_i)$

proof

نفرض صورة عامة بالثوابت . ومن معلومات الرأس نستنتج قيمة هذه الثوابت التي تحقق هذه الصورة فقط

$$P_n(x) = C_0 + (x-x_0)C_1 + (x-x_0)(x-x_1)C_2 + \cdots + (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})C_n \quad \text{--- (1)}$$

→ at $x = x_0$:

$y_0 = f(x_0) = P_n(x_0) = C_0$ $\qquad C_0 = y_0$ --- (2)

→ at $x = x_1$:

$y_1 = f(x_1) = P_n(x_1) = y_0 + (x_1 - x_0)C_1$ $\qquad C_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ --- (3)

→ at $x = x_2$:

$$y_2 = f(x_2) = P_n(x_2) = y_0 + (x-x_0)\, f(x_0,x_1) + (x_2-x_0)(x_2-x_1)C_2$$

K.M.S

$$\therefore C_2 = \frac{1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\left[(y_2-y_0)-(x_2-x_0)\left(\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{x_2-x_0}\left[\frac{y_2-y_0}{x_2-x_1} - \frac{x_2-x_0}{x_2-x_1}\left(\frac{y_1}{x_1-x_0}-\frac{y_0}{x_1-x_0}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{x_2-x_0}\left[\frac{y_2}{x_2-x_1} - \frac{y_0}{x_2-x_1}\left(\frac{x_0-x_2}{x_1-x_0}+1\right) - \frac{y_1(x_2-x_0)}{(x_2-x_1)(x_1-x_0)}\right]$$

توحيد المقامات

$$= \frac{1}{x_2-x_0}\left[\frac{y_2}{x_2-x_1} - \left(\frac{y_0}{x_2-x_1}\cdot\frac{x_1-x_2}{x_1-x_0}\right) - \frac{y_1(x_2-x_0)}{(x_2-x_1)(x_1-x_0)}\right]$$

$$= \left[\frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} - \frac{y_0\overset{-1}{\cancel{(x_1-x_2)}}}{\cancel{(x_2-x_1)}(x_1-x_0)} - \frac{y_1}{(x_2-x_1)(x_1-x_0)}\right]$$

$$= \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} + \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \quad \text{— (3)}$$

من رأس المسألة :

$$f(x_0,x_1,x_2) = \frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2-x_0}$$

$$= \frac{1}{x_2-x_0}\left[\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} - \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\right]$$

$$= \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} - \frac{y_1}{x_2-x_0}\left(\frac{1}{x_2-1}+\frac{1}{x_1-x_0}\right) + \frac{y_0}{(x_1-x_0)(x_2-}$$

بتوحيد المقامات

$$= \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} - \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \quad \text{— (4)}$$

Similarly C_3, C_4, ——

بالتعويض من (3) و (4) ينتج القانون

Page :
Date :

* Interpolation with equal interval:

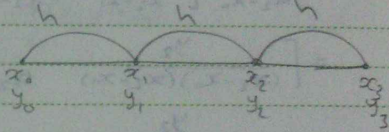
في هذا الجزء ندرس جداول تكون فيها فروق ال x متساوية ونبدأ بدراسة بعض المؤثرات على هذا الجدول.

1 Shift Operator:

$$Ef(x) = f(x+h)$$

هو مؤثر لو أثر على أي خانة في الجدول يمشينا خطوة لقدام

x	x_0	x_1	x_2	—
y	y_0	y_1	y_2	—



$$Ey_1 = Ef(x_1) = f(x_1+h) = y_2$$

$$Ey_2 = y_3 \quad , \quad ———$$

$$E^2f(x) = E(Ef(x)) = E(f(x+h)) = f(x+2h)$$

$$E^n f(x) = f(x+nh)$$

2 The forward operator (Δ-operator):

مؤثر يعطي مقدار التغير في الدالة.

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

ex: $\Delta y_4 = y_5 - y_4$

Page :
Date :

3 The backward operator (∇- operator):

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$

4 The center operator (δ-operator):

$$\delta f(x) = f(x + \frac{h}{2}) - f(x - \frac{h}{2})$$

ex. $\delta y_5 = y_6 - y_4$

5 The average operator (μ-operator):

$$\mu f(x) = \frac{1}{2}\left[f(x+\frac{h}{2}) + f(x-\frac{h}{2})\right]$$

ex. $\mu y_7 = \frac{1}{2}(y_8 + y_6)$

ex. Show that:

1) $\Delta = E - 1$ 2) $\nabla = 1 - E^{-1}$

3) $\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$ 4) $\mu = \frac{1}{2}\left[E^{1/2} + E^{-1/2}\right]$

solution

1) $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$

$= E f(x) - f(x) = (E-1) f(x)$

$\therefore \Delta = E - 1$ #

2) $\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$

$= f(x) - E^{-1} f(x) = (1 - E^{-1}) f(x)$

$\therefore \nabla = 1 - E^{-1}$ #

3) $\delta f(x) = f(x + \frac{h}{2}) - f(x - \frac{h}{2}) = E^{1/2} f(x) - E^{-1/2} f(x)$

$= (E^{1/2} - E^{-1/2}) f(x)$ $\therefore \delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$ #

4) $\mu f(x) = \frac{1}{2}\left[f(x+\frac{h}{2}) + f(x-\frac{h}{2})\right]$

$= \frac{1}{2}(E^{1/2} + E^{-1/2}) f(x)$

$\mu = \frac{1}{2}(E^{1/2} + E^{-1/2})$ #

K.M.S

ex. The mod of a certain frequency curve $y=f(x)$ occurs near $x=9$. The frequency density $y=f(x)$ at $x=8.9, 9, 9.3$ are 0.3, 0.35, 0.25 respectively. Calculate the approximate value of the mod. where mod. is the max. frequency

solution

x	8.9	9	9.3
y	0.3	0.35	0.25

Lagrange method:

$$y = \frac{(x-9)(x-9.3)}{(8.9-9)(8.9-9.3)}(0.3) + \frac{(x-8.9)(x-9.3)}{(9-8.9)(9-9.3)}(0.35) + \frac{(x-8.9)(x-9)}{(9.3-8.9)(9.3-9)}(0.25)$$

$$\therefore y = -2.09x^2 + 37.9x - 171.6 \Rightarrow y = f(x)$$

$$y' = -2.09(2x) + 37.9 = 0 \qquad \therefore x = 9.07$$

$$y'' = -(2.09 * 2) \qquad \therefore x = 9.07 \text{ is the mod point}$$

$$\cancel{y(9.0)} \quad y(9.07) = (-2.09 * (9.07)^2) + (37.9 * 9.07) - 171.6$$

$$= \checkmark\checkmark \quad \#$$

ex. Obtain the missing data of:

x	100	101	102	103	104
y	2	2.0043	—	2.0128	2.0171

solution

Using Lagrange method:

$$y = \frac{(x-101)(x-103)(x-104)}{(100-101)(100-103)(100-104)}(2) + \frac{(x-100)(x-103)(x-104)}{(101-100)(101-103)(101-104)}(2.0043)$$

$$+ \frac{(x-100)(x-101)(x-104)}{(103-100)(103-101)(103-104)}(2.0128) + \frac{(x-100)(x-101)(x-103)}{(104-100)(104-101)(104-103)}(2.0171)$$

K.M.S

$$\therefore y = \frac{-1}{6}(x-101)(x-103)(x-104) + \frac{6681}{20000}(x-100)(x-103)(x-104)$$
$$+ \frac{-629}{1875}(x-100)(x-101)(x-104) + \frac{2071}{12000}(x-100)(x-101)(x-103)$$

$$\therefore y(102) = 1.99956 \ \#$$

ex. The path of a robot in x-y plane can be found from the interpolation of:

x	2	4.5	5.5	7
y	7.5	7.5	6	5

Then the length of the path from $x=2$ to $x=7$ can be found from:

(a) $\int_2^7 \sqrt{1+(0.15x^3-2.25x^2+9.6x-3.9)^2}\,dx$

(b) $\int_2^7 \sqrt{1+(0.45x^2-4.5x+9.6)^2}\,dx$

(c) $\int_2^7 (0.15x^3-2.25x^2+9.6x-3.9)\,dx$

Solution

HINT

لو عندك مسار وعايز تحسب طوله نحسبه من العلاقة

$$L = \int_A^B \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$y \cong \frac{(x-4.5)(x-5.5)(x-7)}{(2-4.5)(2-5.5)(2-7)}(7.5)$$
$$+ \frac{(x-2)(x-5.5)(x-7)}{(4.5-2)(4.5-5.5)(4.5-7)}(7.5)$$
$$+ \frac{(x-2)(x-4.5)(x-7)}{(5.5-2)(5.5-4.5)(5.5-7)}(6) + \frac{(x-2)(x-4.5)(x-5.5)}{(7-2)(7-4.5)(7-5.5)}(5)$$
$$= 0.15x^3 - 2.25x^2 + 9.6x - 3.9$$

∴ الاختيار الصحيح هو B #

K.M.S

⊠ Error Bound for Lagrange:

$$\text{Error} \leq \left| \frac{(x-x_0)(x-x_1) - (x-x_n)}{(n+1)!} M_{n+1} \right|$$

where: $x_0, x_1, \ldots, x_n \rightarrow$ نقاط الجدول

$(n+1) \rightarrow$ عدد نقاط الجدول

$x \rightarrow$ النقطة المراد حساب الخطأ عندها

$M_{n+1} \rightarrow \max\limits_{(x_0 \to x_n)} |f^{(n+1)}(x)|$

M_{n+1} هي أكبر قيمة لمعيار المشتقة $(n+1)$ للدالة عند نقاط الجدول

ex. Consider $f(x) = \cos x$ over $[0, 0.12]$ in the table

x	0	0.4	1.2
y	1	0.92	0.362

obtain the error bound for $x = 0.6$

Solution

$$E(x) \leq \left| \frac{(x-0)(x-0.4)(x-1.2)}{3!} \right| M_3$$

$$M_3 = \max_{[0, 1.2]} |f^{(3)}(x)|$$

$f(x) = \cos x$ $\qquad$ $f'(x) = -\sin x$

$f''(x) = -\cos x$ $\qquad$ $f'''(x) = \sin x$

$\therefore M_3 = \sin 1.2 = 0.0209$

at $x = 0.6$

$$\text{Error} = \left| \frac{(0.6-0)(0.6-0.4)(0.6-1.2)}{3!_6} * 0.0209 \right| =$$

Page :
Date :

[*] To find a root of an equation:

جذر المعادلة هو قيمة x عند $y = 0$

← نضع $y = f(x)$

← نعوض عن x ببعض القيم حتى تتغير اشارة y من ⊖ لـ ⊕ أو العكس

← نكون الجدول

← نطبق Lagrange لمكونات الجدول

← نضع $y = 0$ وتكون قيمة عند هي الـ root

(ex) Use lagrange polynomial to find one approximate root of:

$$\sin x + x - 1 = 0$$

solution

$y = \sin x + x - 1$

$x = 0 \longrightarrow y = -1$ -ve

$x = 1 \longrightarrow y = 0.84$ +ve

قيم x اضربها في $\frac{180}{\pi}$ واعوض في المعادلة

x	0	0.25	0.5	1
y	-1	-0.5	-0.02	1.84

$x = \_\_\_\_$ بعدما نقلب الجدول

put $y=0$ $x=\text{root}$

Operator Properties:

1) $E f(x) = f(x+h)$

$E^n f(x) = f(x+nh)$

2) $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$

3) $\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$

4) $\delta f(x) = f(x+h/2) - f(x-h/2)$

$\Delta = E - 1 \quad , \nabla = 1 - E^{-1} \quad , \delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$

---

ex. Show that:

1) $\Delta (f_r \cdot g_r) = f_r \cdot \Delta g_r + g_{r+1} \Delta f_r$

2) $\Delta (f_r / g_r) = \dfrac{g_r \Delta f_r - f_r \Delta g_r}{g_r \, g_{r+1}}$

HINT

$x_r = x_0 + rh$

$E f_r = f_{r+1}$

$\Delta f_r = f_{r+1} - f_r$

$\nabla f_r = f_r - f_{r-1}$

$\delta f_r = f_{r+\frac{1}{2}} - f_{r-\frac{1}{2}}$

Solution

1)
$$\begin{aligned}
\Delta (f_r \cdot g_r) &= f_{r+1} g_{r+1} - f_r g_r \\
&= f_{r+1} g_{r+1} - f_r g_{r+1} + f_r g_{r+1} - f_r g_r \\
&= g_{r+1} (f_{r+1} - f_r) + f_r (g_{r+1} - g_r) \\
&= g_{r+1} \Delta f_r + f_r \Delta g_r \quad \#
\end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned}
\Delta \left(\frac{f_r}{g_r}\right) &= \frac{f_{r+1}}{g_{r+1}} - \frac{f_r}{g_r} \\
&= \frac{f_{r+1} g_r - f_r g_{r+1}}{g_{r+1} g_r} = \frac{f_{r+1} g_r - f_r g_r + f_r g_r - f_r g_{r+1}}{g_r g_{r+1}} \\
&= \frac{g_r \Delta f_r - f_r \Delta g_r}{g_r \cdot g_{r+1}}
\end{aligned}$$

ويمكن من خلالها انه من قيم متقطعة على الدالة f والدالة g وبدون معرفة الدالتين
يمكن حساب مقدار التغير في حاصل الضرب وحاصل القسمة عند أي نقطة.

ex. Show that:

1. $\delta = \dfrac{\nabla}{\sqrt{1-\nabla}}$
2. $\Delta = \dfrac{1}{2}\delta^2 + \delta\sqrt{1+\dfrac{\delta^2}{4}}$

Solution

$\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$, $\nabla = 1 - E^{-1}$

$\Delta = E - 1$

1. $E^{-1} = 1 - \nabla$ $\quad \therefore E = \dfrac{1}{1-\nabla}$

$\delta = E^{1/2} - E^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\nabla}} - \sqrt{1-\nabla}$

$= \dfrac{1-(1-\nabla)}{\sqrt{1-\nabla}}$

$\therefore \delta = \dfrac{\nabla}{\sqrt{1-\nabla}}$ #

2. $\delta = E^{1/2} - E^{-1/2} \Rightarrow * E^{1/2}$

$(E^{1/2})^2 - \delta E^{1/2} - 1 = 0$

$\text{roots} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$E^{1/2} = \dfrac{\delta \pm \sqrt{\delta^2+4}}{2}$

$E = \dfrac{1}{4}\left(\delta^2 \pm 2\delta\sqrt{\delta^2+4} + \delta^2 + 4\right)$

$= \dfrac{\delta^2}{2} \pm \delta\sqrt{\dfrac{\delta^2}{4}+1} + 1$

$$\therefore E-1 = \frac{\delta^2}{2} \pm \delta\sqrt{\frac{\delta^2}{4}+1}$$

$$\therefore \Delta = \frac{\delta^2}{2} \pm \delta\sqrt{\frac{\delta^2}{4}+1} \quad \#$$

ex. Show that :

$\boxed{1}$ $\delta^3 f_i = f_{i+3/2} - 3f_{i+1/2} + 3f_{i-1/2} - f_{i-3/2}$

$\boxed{2}$ $\Delta^n f_i = \nabla^n f_{i+n} = \delta^n f_{i+n/2}$

Solution

$\boxed{1}$ $\delta^3 f_i = \delta^2 \delta f_i = \delta^2 (f_{i+1/2} - f_{i-1/2})$

$$= \delta(f_{i+1} - f_i - f_i + f_{i-1})$$

$$= \delta f_{i+1} - 2\delta f_i + \delta f_{i-1}$$

$$= f_{i+3/2} - f_{i+1/2} - 2f_{i+1/2} + 2f_{i-1/2} + f_{i-1/2} - f_{i-3/2}$$

$$\therefore \delta^3 f_i = f_{i+3/2} - 3f_{i+1/2} + 3f_{i-1/2} + f_{i-3/2} \quad \#$$

$\boxed{2}$ $\nabla = 1 - E^{-1} = 1 - \frac{1}{E} = (E-1)E^{-1}$

$$\nabla = \Delta E^{-1}$$

$$\nabla^n f_{i+n} = \Delta^n E^{-n} f_{i+n} = \Delta^n f_i$$

$$\Delta^n f_i = \delta^n f_{i+n/2}$$

$$\delta = E^{1/2} - E^{-1/2} = \sqrt{E} - \frac{1}{\sqrt{E}} = \frac{E-1}{\sqrt{E}}$$

$$\delta = (E-1)E^{-1/2},$$

$$\delta = \Delta E^{-1/2}$$

$$\delta^n f_{i+n/2} = \Delta^n E^{n/2} f_{i+n/2}$$
$$= \Delta^n f_{i+n/2-n/2}$$
$$= \Delta^n f_i \quad \#$$

Remark

[1] $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

[2] $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad , |x| < 1$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \quad , |x| < 1$$

[3] $Ln(1-x) = -(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots)$

$$Ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

ex. Show that:

1) $E = e^{hD}$

2) $D = \frac{1}{h}[\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \cdots]$

3) $D = \frac{1}{h}[\nabla + \frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^3 + \cdots]$

4) $D = \frac{1}{h}\sinh^{-1}(\frac{\delta}{2})$

where $Df = \frac{df}{dx}$

Page :
Date :

solution

1. From taylor :

$$f(x+h) = f(x) + h.\frac{f'(x)}{1!} + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots$$

$$E f(x) = \left(1 + hD + \frac{h^2 D^2}{2!} + \cdots\right) f(x)$$

$$E = 1 + hD + \frac{h^2 D^2}{2!} + \cdots$$

$$\therefore E = e^{hD}$$

2. $E = e^{hD}$

$hD = \ln E$

$\cancel{D = \frac{1}{h} \ln E}$ $\qquad D = \frac{1}{h} \ln E$

$\Delta = E - 1$

$D = \frac{1}{h} \ln(\Delta + 1)$

$$D = \frac{1}{h}\left[\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \cdots\right]$$

3. $\nabla = 1 - E^{-1}$ $\qquad E^{-1} = 1 - \nabla$

$E = (1 - \nabla)^{-1}$ $\qquad$, $e^{hD} = E$

$hD = \ln E$

$$D = \frac{1}{h} \ln E = \frac{1}{h} \ln (1 - \nabla)^{-1}$$

$$= \frac{1}{h}\left(\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \cdots\right)$$

4 $\delta = E^{1/2} - E^{-1/2}$

$E = e^{hD}$

$\delta = e^{hD/2} - e^{-hD/2}$, $\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

$\delta = 2 \sinh hD$

$\frac{\delta}{2} = \sinh hD$

$hD = \sinh^{-1} \frac{\delta}{2}$ $D = \frac{1}{h} \sinh^{-1} \frac{\delta}{2}$ #

★ Remark:

Pascale Triangle

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a+b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

★ تعيين خانة مفقودة في جدول:

← اذا امكن عمل جدول بتجربة عملية
وبعد انتهاء التجربة وجد خانة مفقودة
يمكن فبركة هذه القيمة بطريقة رياضية صحيحة

x	x_0	x_1	---	x_i	---	x_n
y	y_0	y_1	---	missing	---	y_n

← نضع $\Delta^n y_0 = 0$ حيث n أقل من عدد خانات الجدول بواحد

← نفك Δ بدلالة: $\Delta = E - 1$ $(E-1)^n y_0 = 0$

← نفك القوس بذات الحدين لتوجد فيه الخانات المفقودة بوضع متغير ب α

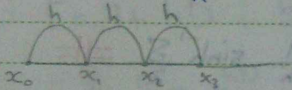
← لو في خانتين ناقصين اعمل مرة $\Delta^n y = 0$ ومرة $\Delta^{n+1} y = 0$

1 Newton's forward Formula:

اذا كان المطلوب تعيين قيمة الدالة عند نقطة واقعة بين أول خانتين في الجدول نستخدم :

$$f(x) \simeq P_n(x) = y_0 + P\Delta y_0 + \frac{P(P-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{P(P-1)(P-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \cdots$$

$$, P = \frac{x - x_0}{h} \qquad , x = x_0 + ph$$



حيث P هي قيمة تحدد مكان x في الجدول

2 Newton's backward Formula:

اذا كان المطلوب تعيين قيمة الدالة عند نقطة واقعة بين آخر خانتين في الجدول نستخدم :

$$f(x) \simeq P_n(x) = y_n + P\nabla y_n + \frac{P(P+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{P(P+1)(P+2)}{3!}\nabla^3 y_n + \cdots$$

$$, P = \frac{x - x_n}{h}$$

حيث : x_n ← آخر قيمة في الجدول x

x ← القيمة المطلوب حساب الدالة عندها

h ← خطوة تقسيم الجدول

~~ex~~ ex) Find $f(1.1)$ and $f(4.5)$ from the following table :

x	1	2	3	4	5
y	2	6	10	8	14

solution

x	y	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
1	2	4	0	-6	20
2	6	4	-6	14	
3	10	-2	8		
4	8	6			
5	14				

Newton's forward

Newton's backward

→ For $f(1.1)$:

$$P = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1.1 - 1}{1} = 0.1$$

In Newton's forward formula :

$$F(1.1) = 2 + (0.1 * 4) + \left(\frac{0.1(0.1-1)}{2!} * 0\right) + \left(\frac{0.1(0.1-1)(0.1-2)}{3!} * -6\right)$$
$$+ \left(\frac{0.1(0.1-1)(0.1-2)(0.1-3)}{4!} * 20\right)$$

في الامتحان لو سبتها لحد كدا وانت معوض بالخطوات صح تاخد الدرجة الكاملة

→ For $f(4.5)$:

$$P = \frac{x - x_n}{h} = \frac{4 - 4.5}{1} = -4.5$$

In Newton's backward formula :

$$F(4.5) = 14 + (-0.5 * 6) + \left(\frac{-0.5(-0.5+1)}{2!} * 8\right) + \left(\frac{-0.5(-0.5+1)(-0.5+2)}{3!} * 14\right)$$
$$+ \left(\frac{-0.5(-0.5+1)(-0.5+2)(-0.5+3)}{4!} * 20\right)$$

Remark مفكوك ذات الحدين :

$$(a+b)^n = a^n + a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \text{---} + b^n$$

Deduction Newton's forward formula:

proof

$$f(x_p) = f(x_0 + ph) = E^p f(x_0) = E^p y_0$$

$\because \Delta = E - 1 \qquad \therefore E = \Delta + 1$

$$f(x_p) = (\Delta+1)^p y_0$$

$$f(x_p) = y_0 \left[1 + P\Delta + \frac{P(P-1)}{2!}\Delta^2 + \text{---}\right]$$

$$f(x_p) = y_0 + P\Delta y_0 + \frac{P(P-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \text{---} \quad \#$$

Deduction Newton's backward formula:

proof

$$f(x_p) = f(x_0 + ph) = E^p f(x_0) = E^p y_0$$

$\because \nabla = 1 - E^{-1} \qquad \therefore E^{-1} = 1 - \nabla \qquad \therefore E = (1-\nabla)^{-1}$

$$f(x_p) = (1-\nabla)^{-p} f(x_0)$$

$$= y_0 \left[1 - (-P * \nabla) + \frac{-P(-P-1)}{2!}\nabla^2 - \left(\frac{-P(-P-1)(-P-2)}{3!}\nabla^3\right) + \text{---}\right.$$

$$f(x_p) = y_0 \left[1 + P\nabla + \frac{P(P+1)}{2!}\nabla^2 + \frac{P(P+1)(P+2)}{3!}\nabla^3 + \text{---}\right]$$

$$f(x_p) = y_0 + P\nabla y_0 + \frac{P(P+1)}{2!}\nabla^2 y_0 + \frac{P(P+1)(P+2)}{3!}\nabla^3 y_0 + \text{---}$$

3 Gauss Forward Formula:

اذا كانت قيمة الدالة المطلوبة محصورة بين خانتين في منتصف الجدول نأخذ اللي قبلها مباشرة بـ x_0

$$P_n(x) \simeq y_0 + P\Delta y_0 + \frac{P(P-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(P+1)P(P-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1}$$

$$+ \frac{(P+1)P(P-1)(P-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \text{——} \quad , \quad P = \frac{x - x_0}{h}$$

$$x_0 \rightarrow y_0 \rightarrow \Delta y_0 \rightarrow \Delta^2 y_{-1} \rightarrow \Delta^3 y_{-1} \rightarrow \Delta^4 y_{-2}$$

الفردي نزود قوس شمال والزوجي نزود قوس يمين

4 Gauss BackWard Formula:

$$P_n(x) \simeq y_0 + P\Delta y_{-1} + \frac{(P+1)P}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(P+1)P(P-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2}$$

$$+ \frac{(P+2)(P+1)P(P-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \text{——} \quad , \quad P = \frac{x - x_0}{h}$$

$$x_0 \rightarrow y_0 \rightarrow \Delta y_{-1} \rightarrow \Delta^2 y_{-1} \rightarrow \Delta^3 y_{-2} \rightarrow \Delta^4 y_{-2}$$

المعاملات الزوجي نزود قوس شمال والفردي نزود قوس يمين .

HINT

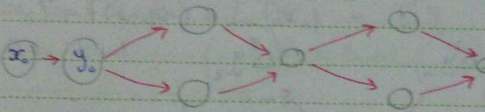
G.F $\rightarrow$ نمشي في الجدول زجزاج لتحت

G.B $\rightarrow$ نمشي في الجدول زجزاج لفوق

5 Striling Formula: $\frac{1}{2}(GF + GB)$

$$P_n(x) = y_0 + \frac{P}{2}\left[\Delta y_0 + \Delta y_{-1}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{P(P-1)}{2!} + \frac{P(P+1)}{2!}\right]\Delta^2 y_{-1}$$

$$+ \frac{1}{2}\,\frac{(P+1)P(P-1)}{3!}\left[\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}\right] + \cdots$$



ex. From the following table find $f(2.5)$ by:
Gauss Forward, Gauss Backward, Striling

x	1	2	3	4
y	5	7	11	15

Solution

1 Gauss Forward:

$$F(2.5) = 7 + (0.5 * 4)$$
$$+ \left(\frac{0.5(0.5-1)}{2!} * 2\right)$$
$$+ \left(\frac{(0.5)(0.5+1)(0.5-1)}{3!} * -2\right)$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	5			
		2		
2	7		2	
		4		-2
3	11		0	
		4		
4	15			

Page :
Date :

2 Gauss Backward:

$$f(2.5) = 7 + (0.5 * 2) + \left(\frac{(0.5+1)0.5}{2!} * 2\right)$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	5			
		2		
2	7		2	
		4		-2
3	11		0	
		4		
4	15			

3 Strilling Formula:

$$f(2.5) = 7 + \frac{0.5}{2}(2+4)$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\left(\frac{0.5(0.5-1)}{2!} + \frac{0.5(0.5+1)}{2!}\right) * 2\right)$$

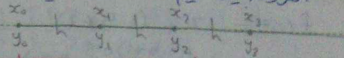
$$+ \left(\frac{1}{2} * \frac{(0.5+1)(0.5)(0.5-1)}{3!} * -2\right)$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	5			
		2		
2	7		2	-2
		4		
3	11		0	
		4		
4	15			

⊡ Interpolation with equal intervals:

الفروق بين قيم x متساوية

$$h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots$$



1 Shift Operator "E":

$$Ef(x) = f(x+h)$$
$$E^2 f(x) = f(x+2h)$$
$$\vdots$$
$$E^n f(x) = f(x+nh)$$

2 Forward Difference Operator "Δ":

$$\Delta = f(x+h) - f(x)$$

3 Backward Difference Operator "∇":

$$\nabla = f(x) - f(x-h)$$

4 Central Difference Operator "δ":

$$\delta f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right)$$

5 Average Mean Operator "μ":

$$\mu f(x) = \frac{1}{2}\left[f\left(x + \frac{h}{2}\right) + f\left(x - \frac{h}{2}\right)\right]$$

⊡ Relations between E & other operators:

	E
Δ	$E - 1$
∇	$1 - E^{-1}$
δ	$E^{1/2} - E^{-1/2}$
μ	$\frac{1}{2}[E^{1/2} + E^{-1/2}]$

Page :
Date :

ex. Prove that:

1) $\Delta\left(\frac{1}{f_i}\right) = \frac{-\Delta f_i}{f_i f_{i+1}}$ 2) $\Delta - \nabla = \Delta\nabla$

3) $\sqrt{1+\delta^2\mu^2} = 1 + \frac{\delta^2}{2}$

Solution

1) $\Delta\left(\frac{1}{f_i}\right) = \frac{1}{f_{i+1}} - \frac{1}{f_i} = \frac{f_i - f_{i+1}}{f_i f_{i+1}} = \frac{-\Delta f_i}{f_i f_{i+1}}$

2) $\Delta - \nabla = E - 1 - (1 - E^{-1})$
$= E + E^{-1} - 2$ — ①
$\Delta\nabla = (E-1)(1-E^{-1}) = E + E^{-1} - 1 - 1$
$= E + E^{-1} - 2$ — ②
from ①, ② R.H.S = L.H.S

3) $\sqrt{1+\delta^2\mu^2} = \left[1 + \frac{1}{4}(E^{1/2} - E^{-1/2})^2(E^{1/2} + E^{-1/2})^2\right]^{1/2}$

$= \left[1 + \frac{1}{4}(E - E^{-1})^2\right]^{1/2}$
$= \frac{1}{2}\left[4 + (E - E^{-1})^2\right]^{1/2}$
$= \frac{1}{2}\left[4 + E^2 - 2 + E^{-2}\right]^{1/2}$
$= \frac{1}{2}\left[E^2 + E^{-2} + 2\right]^{1/2}$
$= \frac{1}{2}\left((E + E^{-1})^2\right)^{1/2}$
$= \frac{1}{2}(E + E^{-1})$ — ①

$1 + \frac{\delta^2}{2} = 1 + \frac{1}{2}(E^{1/2} - E^{-1/2})^2$
$= \frac{1}{2}(E + E^{-1} - 2) + 1$
$= \frac{1}{2}(E + E^{-1})$ — ②

from ①, ② L.H.S = R.H.S

K.M.S

ex. Prove that:

1) $\frac{\Delta^2}{E}(x^3) = 6x \qquad , h=1$

2) $\sum_{k=0}^{n} \Delta^2 f_k = \Delta f_{n+1} - \Delta f_0$

Solution

1) $\frac{\Delta^2}{E}(x^3) = \frac{(E-1)^2}{E}(x^3)$

$= \frac{E^2 - 2E + 1}{E}(x^3)$

$= (E - 2 + E^{-1})x^3$

$= Ex^3 - 2x^3 + E^{-1}x^3$

$= (x+1)^3 - 2x^3 + (x-1)^3$

$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 2x^3 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$= 6x$

2) $\sum_{k=0}^{n} \Delta^2 f_k = \Delta^2 f_0 + \Delta^2 f_1 + \cdots + \Delta^2 f_{n-1} + \Delta^2 f_n$

$= \Delta(\Delta f_0 + \Delta f_1 + \cdots + \Delta f_{n-1} + \Delta f_n)$

$= \Delta[(f_1 - f_0) + (f_2 - f_1) + \cdots + (f_n - f_{n-1}) + (f_{n+1} - f_n)]$

$= \Delta(-f_0 + f_{n+1})$

$= \Delta f_{n+1} - \Delta f_0$

ex. Prove that:

$f_4 = f_3 + \Delta f_2 + \Delta^2 f_1 + \Delta^3 f_1$

Solution

$\Delta f_2 = (f_3 - f_2)$ — ①

$\Delta^2 f_1 = \Delta(\Delta f_1) = \Delta(f_2 - f_1)$

$= (f_3 - f_2) - (f_2 - f_1)$

$= f_3 - 2f_2 + f_1$ — ②

$$\Delta^3 f_1 = \Delta(\Delta^2 f_1) = \Delta(f_3 - 2f_2 + f_1)$$
$$= f_4 - f_3 - 2(f_3 - f_2) + (f_2 - f_1)$$
$$= f_4 - f_3 - 2f_3 + 2f_2 + f_2 - f_1$$
$$= f_4 - 3f_3 + 3f_2 - f_1 \quad — ③$$

from ①, ②, ③ :

$$f_3 + f_3 - f_2 + f_3 - 2f_2 + f_1 + f_4 - 3f_3 + 3f_2 - f_1 = f_4$$

● كيفية حساب خانة ناقصة في الجدول باستخدام العلاقات :

x	x_0	—	x_i	—	x_n
y	y_0	—	y_i	—	y_n

① نتجاهل الخانة الناقصة ونعد باقي النقط

② $\Delta^{(\text{عدد النقط})} y_0 = 0$

③ عوض عن $\Delta = E - 1$ $\Leftarrow$ $(E-1)^{\text{باقي النقط}} y_0 = 0$

④ نفك القوس $(E-1)$ بذات الحدين.

⑤ في حالة اكثر من خانة مجهولة :

$$\Delta^{\text{باقي النقط}} y_0 = 0 \quad , \quad \Delta^{\text{باقي النقط}+1} y_0 = 0$$

ex Use operator properties to get the missing point:

x	1	2	3	4	5
y	2	5	7	–	32

Solution

$$\Delta^4 y_0 = 0 \qquad (E-1)^4 y_0 = 0$$

$$E^4 y_0 - 4E^3 y_0 + 6E^2 y_0 - 4E y_0 + y_0 = 0 \quad \text{——— etc. :D}$$

Report Obtain the missing data by operation proposition

x	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
y	0.135	–	0.111	0.1	–	0.082	0.074

☒ Interpolation by Spline function:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & x_0 \le x \le x_1 \\ S_1(x) & x_1 \le x \le x_2 \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x_n) & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

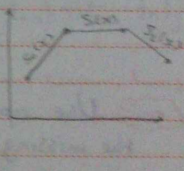
تعتمد طريقة الاستكمال في هذا الجزء على أن تجعل منحنيات بين النقط منفصلة عن بعضها وذلك اذا وصلت بين كل نقطتين إما:

1. خط مستقيم ← Linear Spline
2. منحنى درجة ثانية ← Quadratic Spline
3. منحنى درجة ثالثة ← Cubic Spline

1 Linear Spline:

بين نقط الجدول نوصل بين كل نقطتين بخط مستقيم

x	x_0	x_1	x_2	----	x_n
y	y_0	y_1	y_2	----	y_n



$$\frac{y - y_i}{x - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

$$y - y_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$$

$$y = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$$

$$S(x) = \begin{cases} y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) & , x_0 \le x \le x_1 \\ y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) & ; x_1 \le x \le x_2 \\ \vdots & \vdots \\ y_{n-1} + \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}(x - x_{n-1}) & , x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

ex. Find $S(x)$ by linear Spline form from:

x	1	2	3	4
y	2	5	7	10

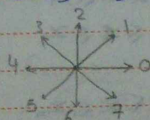
Solution

$$S(x) = \begin{cases} 2 + \frac{5-2}{2-1}(x-1) & , 1 \le x \le 2 \\ 5 + \frac{7-5}{3-2}(x-2) & , 2 \le x \le 3 \\ 7 + \frac{10-7}{4-3}(x-3) & , 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

* Directional Encoding:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

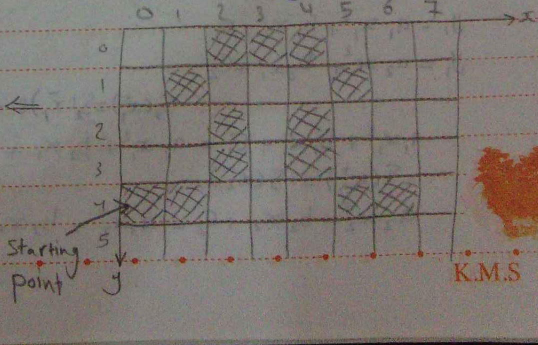
هي طريقة لتحويل أي صورة رقمية إلى كود مكون من أرقام بين 0 و 7 حسب الاتجاهات الموضحة بالرسمة:



يعطي بداية الصورة وتسمى نقطة البداية start point وذلك بعد تقسيم الصورة الى pixels يمكن تحديد الحدود بواسطة هذا الكود وذلك من نقطة البداية فتكون بدل الصورة مجموعة ارقام لو رجعناها تنتج الصورة الأصلية

Code

0123100756 70 $\Leftarrow$



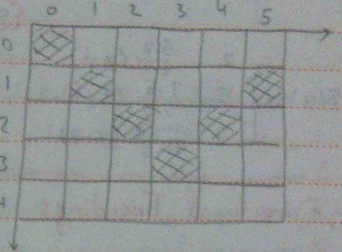
K.M.S

Date :

ex. Find the Image of the f^n represented by directional encoding 77711 and from its Coordinate find linear spline forms

Solution

x	0	1	2	3	4	5
y	0	1	2	3	2	1



$$S(x) = \begin{cases} 0 + \frac{1-0}{1-0}(x-0) & , 0 \le x \le 1 \\ 1 + \frac{2-1}{2-1}(x-1) & , 1 \le x \le 2 \\ 2 + \frac{3-2}{3-2}(x-2) & , 2 \le x \le 3 \\ 3 + \frac{2-3}{4-3}(x-3) & , 3 \le x \le 4 \\ 2 + \frac{1-2}{5-4}(x-4) & , 4 \le x \le 5 \end{cases}$$

[2] Quadratic spline:

بين كل نقطتين متتاليتين في الجدول نرسم منحنى من الدرجة الثانية أي تكون الصورة العامة لدالة ال spline هي:

$$S(x) = \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1 & , x_0 \le x \le x_1 \\ a_2x^2 + b_2x + c_2 & , x_1 \le x \le x_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_nx^2 + b_nx + c_n & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

لتعيين قيم الثوابت نستخدم:

[1] قيم $S_i(x) = a_ix^2 + b_ix + c_i$ هي قيم الجدول عند كل قيمة x

$$y_0 = a_1x_0^2 + b_1x_0 + c_1$$
$$y_1 = a_1x_1^2 + b_1x_1 + c_1$$
$$y_1 = a_2x_1^2 + b_2x_1 + c_2$$

[2] $S(x)$ دالة متصلة: $S_1(x_1^+) = S_1(x_1^-)$

$$a_1x_1^2 + b_1x_1 + c_1 = a_2x_1^2 + b_2x_1 + c_2$$
$$S(x_2^+) = S(x_2^-)$$
$$a_2x_2^2 + b_2x_2 + c_2 = a_3x_2^2 + b_3x_2 + c_3$$

K.M.S

لايتم تطبيق جزء الاتصال لـ x_0 و x_n

③ $S'(x)$ المشتقة الاولى للدالة متصلة

$$S'(x) = \begin{cases} 2a_1x + b_1 & , x_0 \le x \le x_1 \\ 2a_2x + b_2 & , x_1 \le x \le x_2 \\ \vdots \\ 2a_nx + b_n & , x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

$S_2'(x_1^+) = S_1'(x_1^-)$; $S'(x_2^+) = S_2'(x_2^-)$; —— etc.

④ الحد الأول Linear :

$$a_1 = 0$$

ex. From the following data:
Find quadratic Spline Form

x	0	2	4
y	2	5	6

Solution

$$S(x) = \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + C_1 & , 0 \le x \le 2 \\ a_2x^2 + b_2x + C_2 & , 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

⇒ at $x = x_0 = 0$:

$y_0 = a_1x_0^2 + b_1x_0 + C_1$

$2 = C_1$ $\quad C_1 = 2$ —— ①

⇒ at $x = x_1 = 2$:

$y_1 = 4a_1 + 2b_1 + C_1$, $y_1 = 4a_2 + 2b_2 + C_2$

$5 = 4a_1 + 2b_1 + C_1$ —— ② , $5 = 4a_2 + 2b_2 + C_2$ —— ③

⇒ at $x = x_2 = 4$

$y_2 = a_2x^2 + b_2x + C_2$

$6 = 16a_2 + 4b_2 + C_2$ —— ④

Page :
Date :

→ دالة متصلة $s(x)$

$$s(2^+) = s(2^-)$$

$$4a_1 + 2b_1 + c_1 = 4a_2 + 2b_2 + c_2$$

$$c_1 = 2 \quad , \quad a_1 = 0 \qquad \therefore \; 5 = 2b_1 + 2$$

$$b_1 = \frac{3}{2}$$

$$5 = 4a_2 + 2b_2 + c_2 \Longrightarrow$$ هي نفس المعادلة ③

→ دالة متصلة $s'(x)$

$$s'(x) = \begin{cases} b_1 & , 0 \le x \le 2 \\ 2a_2 x + b_2 & , 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

$$s'(2^+) = s'(2^-)$$

$$b_1 = 2a_2 + b_2 \qquad 4a_2 + b_2 = \frac{3}{2} \quad \text{— ⑤}$$

From ③, ④, ⑤ :

$$a_2 = \frac{-1}{2} \quad , \quad b_2 = \frac{7}{2} \quad , \quad c_2 = 0$$

$$s(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x + 2 & , 0 \le x \le 2 \\ \frac{-1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + 0 & , 2 \le x \le 4 \end{cases}$$

3 Cubic Spline Interpolation :

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & , x_0 \le x \le x_1 \\ S_1(x) & , x_1 \le x \le x_2 \\ \vdots & \vdots \\ S_i(x) & \\ \vdots & \\ S_{n-2}(x) & x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases}$$

$$, \; S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

K.M.S

لمعرفة الثوابت نستخدم الآتي :

1) الدالة مثل الجدول عند جميع قيم x

2) $S(x)$ و $S'(x)$ و $S''(x)$ دوال متصلة

فنستنتج العلاقات الجبرية التي يمكن من خلالها حساب الثوابت :

$$a_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h} \quad , \quad b_i = \frac{M_i}{2}$$

$$C_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{M_{i+1} + 2M_i}{6} h \quad , \quad d_i = y_i$$

تعطى في رأس السؤال

$$M_i + 4M_{i+1} + M_{i+2} = \frac{6}{h_i}(y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2})$$

$$, \; i = 0, 1, 2, \ldots, n-2$$

→ Natural Spline : $M_0 = M_n = 0$

← الـ i قيمتها لا تتخطى $n-2$ علشان منطلعش برا الجدول (المعادلة فيها $i+2$)

← الفكرة ان نجعل الثوابت كلها بدلالة M واذا عرفت M عرفت الثوابت وبذلك تقل عدد المعادلات من $4n$ إلى $n-1$ من المرات

عشان من 0 لـ $n-2$ عددهم $n-1$

ex. From the following data:
find cubic spline form

x	0	1	2	3	4
y	0	1	2	2	1

solution

$i = 0, 1, 2$

$M_0 = 0 \quad , M_4 = 0$

$M_i + 4M_{i+1} + M_{i+2} = \frac{6}{h}(y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2})$

$\Rightarrow i = 0:$

$4M_1 + M_2 = 6(y_0 - 2y_1 + y_2)$

$4M_1 + M_2 = 0$ — ①

$\Rightarrow i = 1:$

$M_1 + 4M_2 + M_3 = 6(y_1 - 2y_2 + y_3)$

$M_1 + 4M_2 + M_3 = -1$ — ②

$\Rightarrow i = 2:$

$M_2 + 4M_3 + M_4 = 6(y_2 - 2y_3 + y_4)$

$M_2 + 4M_3 + M_4 = -6$ — ③

From ①, ②, ③:

$M_0 = 0 \quad , M_1 = \frac{9}{28} \quad , M_2 = \frac{-9}{7} \quad , M_3 = \frac{-33}{28} \quad , M_4 = 0$

$a_1 = \frac{M_2 - M_1}{6} \quad , b_1 = \frac{M_1}{2} \quad , C_1 = \checkmark \quad , d_1 = y_1$

$a_2 = \frac{M_3 - M_2}{6} \quad , b_2 = \frac{M_2}{2} \quad , C_2 = \checkmark \quad , d_2 = y_2$

$a_3 = \frac{M_4 - M_3}{6} \quad , b_3 = \frac{M_3}{3} \quad , C_3 = \checkmark \quad , d_3 = y_3$

$a_0 = \frac{M_1 - M_0}{6} \quad , b_0 = \frac{M_0}{3} \quad , C_0 = \checkmark \quad , d_0 = y_0$

$S(x) = \begin{cases} \checkmark \\ \checkmark \\ \checkmark \end{cases}$

K.M.S

Interpolation with Equal intervals:

Given

x	x_0	x_1	—	x_n
y	y_0	y_1	—	y_n

Required $y_p = ??$ at $x = x_p$

Solution

1) Newton's forward formula:

$x_p = x_0 + ph$, $P = \frac{x_p - x_0}{h}$ x_p في أول فاصلتين في الجدول

$$y_p = y_0 + P\Delta y_0 + \frac{P(P-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{P(P-1)(P-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \text{—}$$

2) Newton's backward formula:

$x = x_n + ph$, $P = \frac{x_p - x_n}{h}$ x_p في آخر فاصلتين في الجدول

$$y_p = y_n + P\nabla y_n + \frac{P(P+1)}{2!}\nabla^2 y_n + \frac{P(P+1)(P+2)}{3!}\nabla^3 y_n + \text{—}$$

ex. Estimate the population of years 1895 , 1925 from

Year	1891	1901	1911	1921	1931
Population	46	66	81	93	101

solution

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1891	46	20	-5	2	-3
1901	66	15	-3	-1	
1911	81	12	-4		
1921	93	8			
1931	101				

⇒ For $x_p = 1895$: $P = \frac{1895 - 1891}{10} = 0.4$

$$y_p = 46 + (0.4 * 20) + \left(\frac{0.4(0.4-1)}{2!} * -5\right) + \left(\frac{0.4(0.4-1)(0.4-2)}{3!} * 2\right) + \left(\frac{0.4(0.4-1)(0.4-2)(0.4-3)}{4!} * -3\right) =$$

⇒ For $x_p = 1925$: $P = \frac{1925 - 1931}{10} = -0.6$

$$y_p = 101 + (-0.6 * 8) + \left(\frac{-0.6(-0.6+1)}{2!} * 4\right) + \left(\frac{-0.6(-0.6+1)(-0.6+2)}{3!} * -1\right) + \left(\frac{-0.6(-0.6+1)(-0.6+2)(-0.6+3)}{4!} * -3\right) =$$

(ex.) Find the number of students who obtained marks higher than 70

Marks	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
No. of students	2	5	6	3	4

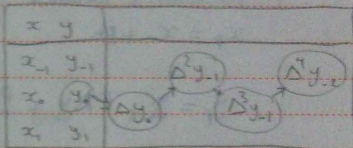
(solution)

Marks	0	20	40	60	80
[illegible] marks [illegible]	20	18	13	7	4

وتكمل عادي

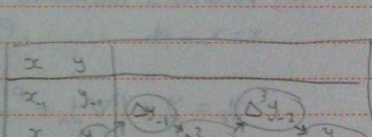
3 Gauss Forward formula:

$$y_p = y_0 + P\Delta y_0 + \frac{P(P-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(P+1)P(P-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{(P+1)P(P-1)(P-2)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \cdots$$



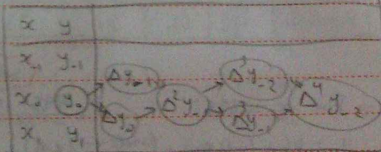
4 Gauss Backward Formula:

$$y_p = y_0 + P\Delta y_{-1} + \frac{(P+1)P}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(P+1)P(P-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \frac{(P+2)(P+1)P(P-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \cdots$$



5 Strilling Formula:

$$y_p = y_0 + \frac{P}{2}(\Delta y_0 + \Delta y_{-1}) + \frac{1}{2}\left(\frac{P(P-1)}{2!} + \frac{P(P+1)}{2!}\right)\Delta^2 y_{-1} + \frac{1}{2}\frac{(P-1)P(P+1)}{3!}(\Delta^3 y_{-1} + \Delta^3 y_{-2}) + \cdots$$



[*] 1^{st} derivative form:

[1] Forward difference 1^{st} derivatives:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \cdots$$

$$\therefore hf'(x) = f(x+h) - f(x) - \frac{h^2}{2!}f''(x) - \cdots$$

$$hf'(x) = f(x+h) - f(x) - \frac{h^2}{2!}f''(\rho) \quad , x-h < \rho < x+h$$

نهمل بعد الحد الثالث في المفكوك ونعتبر الحد الذي يحتوي على h^2 هو الذي يعطي أعلى قيمة الخطأ

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2}f''(\rho)$$

$$\therefore f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$|error| \leq \left|\frac{h}{2}f''(\rho)\right| \quad , x-h < \rho < x+h$$

⟹ حفظ

[2] Backward difference 1^{st} derivatives:

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \cdots$$

نقف عند الحد الذي يحتوي على h^2 ونهمل الباقي

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(\rho)$$

$$hf'(x) = f(x) - f(x-h) + \frac{h^2}{2!}f''(\rho)$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{h}{2!}f''(\rho)$$

$$f'(x) \simeq \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

$$|error| \leq \left|\frac{h}{2!}f''(\rho)\right| \quad , x-h < \rho < x+h$$

⟹ حفظ

Page :
Date :

3 Center difference 1^{st} derivatives:

$$f(x+h) = \cancel{f(x)} + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \cdots$$

$$f(x-h) = \cancel{f(x)} - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(x) + \cdots$$

بطرح المعادلتين:

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{2h^3}{3!}f'''(x)$$

$$2hf'(x) = f(x+h) - f(x-h) - \frac{2h^3}{3!}f'''(\xi)$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{3!}f^{(3)}(\xi)$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

$$|error| \leq \left|\frac{h^2}{3!}f^{(3)}(\xi)\right| \quad , x-h < \xi < x+h$$

حفظ

---

ex. Given $f(x) = e^x$ approximate $f'(1.5)$ by:
1. Forward 2. Backward 3. Central

divided difference and find the error , $h = 0.1$

solution

1. $f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $x = 1.5$, $h = 0.1$

$$f'(1.5) = \frac{f(1.6) - f(1.5)}{0.1} = \frac{e^{1.6} - e^{1.5}}{0.1} = 4.7134$$

2. $f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \frac{e^{1.5} - e^{1.4}}{0.1} = 4.2648$

$$|error| \leq \left|\frac{h}{2}f''(\xi)\right|$$

$f(x) = e^x$; $f'(x) = e^x$; $f''(x) = e^x$

$|error| \leq \frac{0.1}{2}e^{\xi}$ $1.5 - 0.1 < \xi < 0.1 + 1.5$

$$|error| \leq \frac{0.1}{2}e^{1.6}$$

K.M.S

Page :
Date :

نوجد أعلى قيمة لـ e^{ρ} وهي عندما تأخذ ρ أكبر قيمة لها $(x+h)$ التي هي 1.6

$$|error| \leq \left|\frac{h^2}{3!} f'''(\rho)\right|$$

$f(x) = e^x \quad \therefore \quad f'''(x) = e^x$

$$|error| \leq \frac{(0.1)^2}{3!} e^{\rho} \qquad 1.4 < \rho < 1.6$$

$$|error| \leq \frac{(0.1)^2}{3!} e^{1.6}$$

* 2^{nd} derivative form:

$$f(x+h) = f(x) + \cancel{h f'(x)} + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cancel{\frac{h^3}{3!} f'''(x)} + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) + \cdots$$

$$f(x-h) = f(x) - \cancel{h f'(x)} + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \cancel{\frac{h^3}{3!} f'''(x)} + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(x) + \cdots$$

بجمع المعادلتين:

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{2h^4}{4!} f^{(4)}(\rho)$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \Rightarrow$$ حفظ

$$|error| \leq \left|\frac{2h^2}{4!} f^{(4)}(\rho)\right| \quad , x-h < \rho < x+h$$

[*] Ricardson Extrapolation Algorithm :

لتحسين المشتقة الأولى نقلل الخطوة h إلى $\frac{h}{2}$ أو $\frac{h}{4}$ أو $\frac{h}{8}$

$$D_{n,m+1} = \frac{4^m}{4^m-1} D_{n,m} - \frac{1}{4^m-1} D_{n-1,m}$$

$$D_{n,1} = a\left(\frac{h}{2^{n-1}}\right) \quad ; D_{11} = f'(x)$$

[*] Deduce Ricardson Esxtrapolation form

مهم جداً

$$D_{n,m+1} = \frac{4^m}{4^m-1} D_{n,m} - \frac{1}{4^m-1} D_{n-1,m}$$

where $D_{n,1} = a\left(\frac{h}{2^{n-1}}\right)$; $D_{11} = f'(x)$ by center difference

Proof

تعتمد الفكرة على تصغير خطوة التقسيم بأن تكون أول مرة h في أول خطوة في ثاني خطوة نبدل h بـ $\frac{h}{2}$ وفي ثالث خطوة نبدل الـ h بـ $\frac{h}{4}$ وهكذا

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots$$

بالطرح :

$$f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + \frac{h^2}{3!}f'''(x) + \cdots$$

$$f'(x) \simeq a(h) + C_2h^2 + C_3h^4 + \cdots \quad \text{الأسس الزوجية فقط} \quad (1)$$

$\Rightarrow$ Replace h by $\frac{h}{2}$:

$$f'(x) = a\left(\frac{h}{2}\right) + C_2\frac{h^2}{4} + C_3\frac{h^4}{16} + \cdots \quad (2)$$

للاختصار h^2 من 1 و 2 :

نضرب 2 في 4 و نطرح الناتج من 1 :

$$4 f'(x) = 4 a\left(\frac{h}{2}\right) + C_2 h^2$$

$$f'(x) \simeq a(h) + C_2 h^2$$

يهمل الحدود بعد h^2

$$3 f'(x) \simeq 4 a\left(\frac{h}{2}\right) - a(h)$$

$$\underbrace{f'(x)}_{D_{22}} \simeq \frac{4}{3} \underbrace{a\left(\frac{h}{2}\right)}_{D_{21}} - \frac{1}{3} \underbrace{a(h)}_{D_{11}}$$

$$\boxed{D_{22} = \frac{4}{3} D_{21} - \frac{1}{3} D_{11}} \Longrightarrow \#$$

⇛ Replace h bey $\frac{h}{4}$:

$$\boxed{D_{33} = \frac{6}{15} D_{32} - \frac{1}{15} D_{22}} \Longrightarrow \#$$ and so on

	$\left(\frac{4}{3}, \frac{-1}{3}\right)$	$\left(\frac{16}{15}, \frac{-1}{15}\right)$	$\left(\frac{64}{63}, \frac{-1}{63}\right)$

$$\begin{tikzcd}
D_{11} \arrow[dr, "*\frac{-1}{3}"] & & & \\
D_{21} \arrow[r, "*\frac{4}{3}"] \arrow[dr, "*\frac{-1}{3}"] & D_{22} \arrow[dr, "*\frac{-1}{15}"] & & \\
D_{31} \arrow[r, "*\frac{4}{3}"] \arrow[dr, "*\frac{-1}{3}"] & D_{32} \arrow[r, "*\frac{16}{15}"] \arrow[dr, "*\frac{-1}{15}"] & D_{33} \arrow[dr, "*\frac{-1}{63}"] & \\
D_{41} \arrow[r, "*\frac{4}{3}"] & D_{42} \arrow[r, "*\frac{16}{15}"] & D_{43} \arrow[r, "*\frac{64}{63}"] & D_{44}
\end{tikzcd}$$

ex. Use the following data to find

x	1.28	1.29	1.3	1.31	1.32
y	11.59	13.79	14.04	14.31	16.86

① $f''(1.3)$

② D_{22} (Richardson Extrapolation) for $f''(1.3)$

Solution

① $f''(x) = \frac{1}{h^2}\left[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\right]$

$f''(1.3) = \frac{1}{(0.01)^2}\left[(13.79 - (2*14.04) + 14.31)\right]$

عشان الجدول يغطي مطاليب المسألة لو طلب مني D_{22} في رأس المسألة
أخلي الخطوة = 2h ولو طلب D_{33} أخلي الخطوة = 4h ولو طلب D_{44} تبقى 8h وهكذا

② Let $h = 0.02$

$D_{11} = f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

$= \frac{f(1.32) - f(1.28)}{2*0.02} = \frac{16.86 - 11.59}{0.04} = 131.75$

$D_{21} = a\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{f(x+h/2) - f(x-h/2)}{2(h/2)}$

$= \frac{f(1.31) - f(1.29)}{0.02} = \frac{14.31 - 13.79}{0.02} \simeq 53$

$D_{22} = \frac{4}{3} D_{21} - \frac{1}{3} D_{11}$

$= \left(\frac{4}{3} * 53\right) - \left(\frac{1}{3} * 131.75\right)$

ماذا لو كانت المطلوب مشتقة بين خانات الجدول؟؟؟

K.M.S

[*] Derivatives by Newton's Forward Difference:

⇐ تعتمد فكرته على تكوين علاقات بين قيم الجدول حيث نستخدم كل قيمة موجودة في الجدول ولا نخرج عن القيم المعطاه في الجدول.

⇐ السؤال - ماذا لو اردنا حساب المشتقة الأولى أو الثانية لنقطة بين أول قيمتين أو آخر قيمتين أو أي قيمتين في النص ؟؟ $\boxed{\text{هام جداً}}$

1. حساب المشتقة الأولى لنقطة بين أول قيمتين في الجدول :

نستخدم قانون نيوتن الأمامي

$$f(x) = f_0 + P\Delta f_0 + \frac{P(P-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{P(P-1)(P-2)}{3!}\Delta^3 f_0 + \text{——}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dP} * \frac{dP}{dx} \qquad , \quad P = \frac{x-x_0}{h} \qquad \therefore \frac{dP}{dx} = \frac{1}{h}$$

$$\therefore \frac{df}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{dP}{dx}$$

حفظ

$$\therefore \frac{df}{dx} = \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 + \frac{2P-1}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{3P^2-6P+2}{3!}\Delta^3 f_0 + \text{---}\right]$$

2. حساب المشتقة الثانية بين أول نقطتين في الجدول :

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{1}{h}\frac{d}{dP}\left(\frac{df}{dx}\right)$$

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\frac{d^2f}{dP^2}$$

حفظ

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 f_0 + \frac{6P-6}{3!}\Delta^3 f_0 + \frac{12P^2-36P+22}{4!}\Delta^4 f_0 + \text{——}\right]$$

بالمثل اذا كانت بين آخر نقطتين في الجدول أو أي نقطتين في النص

ex From the following table find:

$f'(2.2)$, $f''(2.2)$, $f''(4)$, $f'(2)$

x	2	4	6	8
y	6	10	12	16

Solution

$$P = \frac{x - x_0}{h} = \frac{2.2 - 2}{2} = 0.1$$

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
2	6	4	-2	8
4	10	2	2	
6	12	4		
8	16			

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 + \frac{2P-1}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{3P^2-6P+2}{3!}\Delta^3 f_0 + \text{———}\right]$$

$$f'(2.2) = \frac{1}{2}\left[4 + \left(\frac{(2*0.1)-1}{2!} * -2\right) + \left(\frac{3*(0.1)^2 - (6*0.1)+2}{3!} * 4\right)\right] = \checkmark\checkmark$$

$$f''(2.2) = \frac{1}{2^2}\left[\left(\frac{2}{2!} * -2\right) + \left(\frac{(6*0.1)-6}{3!} * 4\right)\right] = \checkmark\checkmark$$

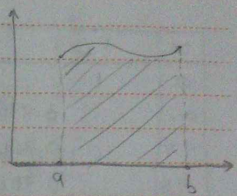
$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\left[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\right]$$

$$\therefore f'(2) = \frac{10-6}{2} = 2$$

$$, f''(4) = \frac{1}{4}\left[12 - (2*10) + 6\right] = \frac{-1}{2}$$

☒ Numerical Integration:

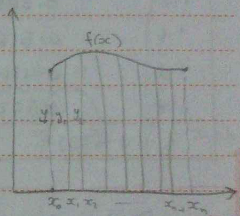


$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

التكامل العددي لحساب تكامل محدد تعتمد فكرته على تعيين المساحة أسفل المنحنى

[I] Trapiziodal Rule: (قاعدة أشباه المنحرفات)

تعتمد على تقسيم فترة التكامل لخطوات طولها h



$$I = \frac{y_1 + y_0}{2} h + \frac{y_2 + y_1}{2} h + \text{——} + \frac{y_{n+1} + y_n}{2} h$$

$$I = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_n + 2(y_1 + \text{——} + y_{n-1}) \right]$$

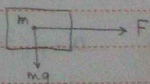
Error $E_T \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M_2$

$$M_2 = \max_{[a,b]} f''(x)$$

حفظ

ex. At $t=0$ a body of unit mass initially at rest. At the origin move along x-axis under the force $F = \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}$. Find the velocity at intervals of 0.2 from $t=0$ to 2

Solution



$ma = F \qquad a = \frac{d^2x}{dt^2}$

$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

$\therefore\ v = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt \quad , h = 0.2 \quad , f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}$

Date

x	$f(x)$
0	1
0.2	0.9960
0.4	0.9645
0.6	0.9068
0.8	0.8139
1	0.7071
1.2	0.6051
1.4	0.5163
1.6	0.4301
1.8	0.372
2	0.3333

$$I_T = \frac{h}{2}\left[y_0 + y_b + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_a)\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[1 + 0.3333 + 2(0.9960 + \cdots + 0.372)\right]$$

$$= \checkmark\checkmark$$

ex: Determine the number of sub-interval n to approximate $\int_0^2 \frac{dx}{x+4}$ with error Less than 10^{-4} by Trapiziodal

Solution

$$E_T \leq \frac{(b-a)h^2}{12} M_2$$

$a = 0$, $b = 2$, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{n}$

$M_2 = \text{Max}\,|f''(x)|$

$f(x) = \frac{1}{x+4} = (x+4)^{-1}$, $f'(x) = -(x+4)^{-2}$

$f''(x) = 2(x+4)^{-3} = \frac{2}{(x+4)^3}$, $0 \leq x \leq 2$

$$M_2 = \frac{2}{(0+4)^3} = \frac{1}{32}$$

K.M.S

$$E_T \leqslant \frac{(2-0)*4}{12n^2} * \frac{1}{32} \leqslant 10^{-4}$$

$$\frac{1}{24n^2} \leqslant 10^{-4} \qquad \therefore 24n^2 \geqslant 10^4$$

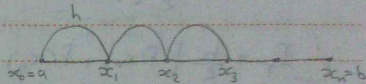
$$\therefore n > \sqrt{\frac{10^4}{24}} \qquad N > 20.3 \qquad \therefore N \geqslant 21$$

ex. Deduce the form of the Trunction error of Trapiziodal rule and the form of the Trapiziodal rule

solution

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \text{——}$$



$$+ \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx + \text{——} + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

$$I_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \qquad , \quad f(x) = F'(x)$$

$$I_i = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

$$F(x_{i-1}) = F(x_i - h)$$ واستخدام مفكوك تايلور

$$= F(x_i) - h F'(x_i) + \frac{h^2}{2!} F''(x_i) - \frac{h^3}{3!} F'''(x_i) + \text{——}$$

نرجع الصورة إلى $f(x)$

$$= F(x_i) - h f(x_i) + \frac{h^2}{2!} f'(x_i) - \frac{h^3}{3!} f''(x_i) + \text{——}$$

بالتعويض في معادلة I_i

$$I_i = h f(x_i) - \frac{h^2}{2!} f'(x_i) + \frac{h^3}{3!} f''(x_i) - \text{——}$$

بالتعويض عن المشتقة الأولى بـ Backward

$$I_i = hF(x_i) - \frac{h^2}{2}\left[\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \frac{h}{2} f''(x_i)\right] + \frac{h^3}{3!} f'''(x_i)$$

Page
Date

$$\therefore I_i = h f(x_i) - \frac{h}{2} f(x_i) + \frac{h}{2} f(x_{i-1}) + \left(\frac{h^3}{6} - \frac{h^3}{4}\right) f''(x_i)$$

$$= \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i-1}) \right]}_{\text{القانون}} - \underbrace{\frac{h^3}{12} f''(x_i)}_{\text{الـ error}}$$

$$I = I_1 + I_2 + \text{——} + I_n$$

$$I_T = \frac{h}{2}\left[f(x_1) + f(x_0) \right] + \frac{h}{2}\left[f(x_2) + f(x_1) \right] + \text{——}$$

$$+ \frac{h}{2}\left[f(x_n) + f(x_{n-1}) \right]$$

$$I_T = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\left(f(x_1) + \text{——} + f(x_{n-1}) \right) \right] \quad \#_1$$

$$E_{T_i} = \left| \frac{-h^3}{12} f''(x_i) \right|$$

$$E_{T} = \Sigma \, E_{T_i}$$

$$= \frac{h^3}{12}\left(f''(x_1) + f''(x_2) + \text{——} + f''(x_n) \right)$$

اذا كانت اعلى قيمة للمشتقة الثانية هي M_2

$$E_T \leq \frac{h^3}{12} n M_2 \qquad , \; h = \frac{b-a}{n}$$

$$E_T \leq \frac{(b-a)\, h^2}{12} M_2 \quad \#_2$$

③ Simpson Rule:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$I_s = \frac{h}{3}\left[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \cdots) + 2(y_2 + y_4 + \cdots)\right]$$

Error $E_s \leq \dfrac{(b-a)h^4}{180} M_4$

$$M_4 = \max_{a \le x \le b} \left| f^{(4)}(x) \right| \quad , \quad h = \frac{b-a}{n}$$

$n \leftarrow$ لابد أن يكون زوجي

④ Weddle's Method:

1 5 1 6 1 5 1

$h = \dfrac{b-a}{n}$ $n \leftarrow$ لا بد أن يكون من مضاعفات الـ 6

$$I = \frac{3h}{10}\left[y_0 + 5y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + y_6\right]$$ $\rightarrow$ $n=6$ عدد التقسيمات

لو $n=12$:

1 5 1 6 1 5 1
1 5 1 6 1 5 1
1 5 1 6 1 5 2 5 1 6 1 5 1

- هذا الجزء لازم يكون عدد التقسيمات فيه 6 أو 12 أو 18 وطريقة simpson لازم تكون عدد التقسيمات زوجي وطريقة Trapizodd بأي عدد
- عشان أحل مسألة بالـ ٣ طرق مع بعض بأخد الـ $n=6$ أو $n=12$ حتى يتم حل الـ ٣ طرق بجدول واحد.

Ex. From $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{x+4}$

1) Find the value of integration by simpson and weddle
2) Find the number of subintervals n to find the integration by simpson with error less than 10^{-4}

Solution

أصغر عدد يقبل الـ simpson والـ weddle مع بعض هو 6

1) $n=6 \quad , h=\frac{b-a}{n}=\frac{4-0}{6}=\frac{2}{3} \quad , y=\frac{1}{x+4}$

x	$f(x)$	فردي	زوجي
0	1/4		
$\frac{2}{3}$		3/14	
$\frac{4}{3}$			3/16
6		1/6	
$\frac{8}{3}$			3/20
$\frac{10}{3}$		3/22	
4	1/8		

$\Rightarrow$ Simpson's Rule:

$$I_s=\frac{h}{3}\left[y_0+y_6+4(y_1+y_3+y_5)+2(y_2+y_4)\right]$$

$$=\frac{2}{9}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+4\left(\frac{3}{14}+\frac{1}{6}+\frac{3}{22}\right)+2\left(\frac{3}{16}+\frac{3}{20}\right)\right]$$

$$= \checkmark$$

$\Rightarrow$ Weddle's Rule:

$$I_w=\frac{3h}{10}\left[y_0+5y_1+y_2+6y_3+y_4+5y_5+y_6\right]$$

$$=\frac{3*2}{30}\left[\frac{1}{4}+\left(5*\frac{3}{14}\right)+\frac{3}{16}+\left(6*\frac{1}{6}\right)+\frac{3}{20}+\left(5*\frac{3}{22}\right)+\frac{1}{8}\right]$$

$$= \checkmark$$

2) $E_s \leqslant \frac{(b-a)h^4}{180} M_4 \leqslant 10^{-4} \qquad M_4=\max_{0\leq x\leq 4}\left|f^{(4)}(x)\right|$

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{4-0}{n}=\frac{4}{n}$$

$$f(x)=\frac{1}{x+4}=(x+4)^{-1} \quad , \quad f'(x)=-(x+4)^{-2}$$

$$f''(x)=2(x+4)^{-3} \quad , \quad f'''(x)=-6(x+4)^{-4}$$

$$f^{(4)}(x)=24(x+4)^{-5}=\frac{24}{(x+4)^5}$$

$$M_4=\max\left|f^{(4)}(x)\right|=\frac{24}{(0+4)^5}=\frac{24}{4^5}$$

$$\frac{4-0}{180}*\frac{4^4}{n^4}*\frac{24}{4^5}\leqslant 10^{-4}$$

$$\frac{24}{180\,n^4} \leqslant 10^{-4} \qquad \frac{180\,n^4}{24} \geqslant 10^4$$

$$n^4 \geqslant \frac{10^4 * 24}{180} \qquad n \geqslant \sqrt[4]{\frac{10^4 * 24}{180}} \qquad n \geqslant 6.04 \qquad \underline{n = 7}$$

(*) Romberg Algorithm:

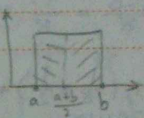
- تعتمد هذه الطريقة على تصغير فترة التقسيم وذلك بتصغير خطوة التقسيم h
- في أول خطوة نجعل $h = \frac{b-a}{2}$ يعني نقسم المساحة تحت المنحنى لـ مستطيلين
- في ثاني خطوة نجعل $h = \frac{b-a}{4}$ يعني نقسم المساحة تحت المنحنى لـ ٤ مستطيلات
- في ثالث خطوة نجعل $h = \frac{b-a}{8}$ يعني نقسم المساحة تحت المنحنى لـ ٨ مستطيلات وهكذا..

$$R_{k,1} = \frac{b-a}{2^k}\left[f(a)+f(b)\right] + \frac{b-a}{2^{k-1}} \sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f\left[a + i\left(\frac{b-a}{2^{k-1}}\right)\right] \quad , h = \frac{b-a}{2^{k-1}}$$

الصورة العامة

→ $h = \frac{b-a}{2}$:

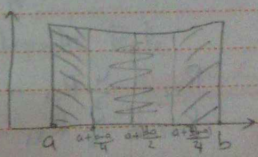
$$R_{11} = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$



→ $h = \frac{b-a}{4}$:

مساحة الأول + مساحة الأخير + مساحة اللي في النص

$$R_{21} = \frac{b-a}{4}\left[f(a)+f(b)\right] + \frac{b-a}{2}\left[f\left(a+\frac{b-a}{2}\right)\right]$$



→ $h = \frac{b-a}{8}$:

$$R_{31} = \frac{b-a}{8}\left[f(a)+f(b)\right] + \frac{b-a}{4}\left[f\left(a+\frac{b-a}{4}\right) + f\left(a+\frac{b-a}{2}\right) + f\left(a+\frac{3(b-a)}{4}\right)\right]$$

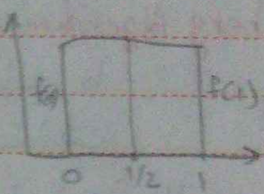
ex. Use Romberg Algorithm to evaluate $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$ and find R_{33}

solution

$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$; $a = 0$; $b = 1$

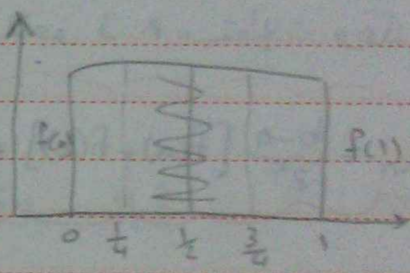
→ $h = \frac{b-a}{2} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$

$R_{11} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{0+1} + \frac{1}{1+1}\right] = \frac{3}{4}$



→ $h = \frac{b-a}{4} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$

$R_{21} = \left(\frac{1}{4} * 1\right) + \left(\frac{1}{4} * \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} * \frac{4}{5}\right)$
$= 0.775$



→ $h = \frac{b-a}{8} = \frac{1-0}{8} = \frac{1}{8}$

$R_{31} = \left(\frac{1}{8} * 1\right) + \left(\frac{1}{8} * \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} * \frac{16}{17}\right) + \left(\frac{1}{4} * \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} * \frac{16}{25}\right)$
$= 0.78279412$

$$\begin{tikzcd}
R_{11} \arrow[dr, "*\frac{-1}{3}"] & & \\
R_{21} \arrow[r, "*\frac{4}{3}"] \arrow[dr, "*\frac{-1}{3}"] & R_{22} \arrow[dr, "\frac{-1}{15}"] & \\
R_{31} \arrow[r, "*\frac{4}{3}"'] & R_{32} \arrow[r, "*\frac{16}{15}"'] & R_{33}
\end{tikzcd}$$

$R_{22} = \frac{4}{3} R_{21} - \frac{1}{3} R_{11}$

$R_{32} = \frac{4}{3} R_{31} - \frac{1}{3} R_{21}$

$R_{33} = \frac{16}{15} R_{32} - \frac{1}{15} R_{22}$

(*) Gaussian Quadrature:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \simeq w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \dots + w_n f(x_n)$$

الفكرة ان نحل الدالة $f(x)$ بـ سلوك كثيرات الحدود $\{1, x, x^2, \dots, x^{2n+1}\}$ ونقسم فترة التكامل إلى نقط x_i بأوزان w_i والتي فائدتها أن تعطي معلومة أن مكان ال x له وزن كحساب التكامل من نقطة إلى أخرى:

(1) Two-Point Gauss-Legendre Rule:

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$$

في حالة تقسيم فترة التكامل لنقطتين مختلفتين تكون قيم

$w_0 = 1$, $w_1 = 1$, $x_0 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ex. Use Gauss-Legendre Two-Point to evaluate $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x+1}$

solution

$w_0 = 1$, $w_1 = 1$, $x_0 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $f(x) = \frac{1}{x+1}$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x+1} = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) = \frac{1}{\frac{-1}{\sqrt{3}}+1} + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}+1} = \text{كك}$$

EX Deduce the form of Two-Point Gauss-Legendre Rule

بيتكرر في الامتحان

Proof

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) \rightarrow (*)$$

$, f(x) = \{1, x, x^2, x^3\}$

→ at $f(x) = 1$:

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx = w_0(1) + w_1(1) = x\Big|_{-1}^{1} = 2$$

$$\therefore w_0 + w_1 = 2 \quad \text{--- (1)}$$

→ at $f(x) = x$:

$$\int_{-1}^{1} x \, dx = w_0 x_0 + w_1 x_1 = 0$$

$$w_0 x_0 + w_1 x_1 = 0 \quad \text{—— ②}$$

→ at $f(x) = x^2$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx = w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 = \frac{2}{3} \quad \text{—— ③}$$

→ at $f(x) = x^3$:

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3 = 0$$

$$w_0 x_0^3 + w_1 x_1^3 = 0 \quad \text{—— ④}$$

بقسمة ② على ④ :

$$\frac{w_0 x_0}{w_0 x_0^3} = \frac{w_1 x_1^3}{w_1 x_1^3} \qquad \therefore \; x_0^2 = x_1^2$$

$$x_0^2 - x_1^2 = 0 \qquad (x_0 - x_1)(x_0 + x_1) = 0$$

$\therefore x_0 = x_1 \Rightarrow$ مرفوض or $x_0 = -x_1 \rightarrow$ ② بالتعويض في

$w_0 x_0 - w_1 x_0 = 0$ $w_0 = w_1 \rightarrow$ ① بالتعويض في

$2w_0 = 2$

$\therefore \; w_0 = w_1 = 1 \quad , x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad , x_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ #

⊛ Three-Point Gauss-legendre Rule:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \simeq w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

$$w_0 = \frac{5}{9} \quad , w_1 = \frac{8}{9} \quad , w_2 = \frac{5}{9}$$

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}} \quad , x_1 = 0 \quad , x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

ex. Evaluate $\int_{-1}^{1} \sinh x^2 \, dx$ by 3-point Gauss-Legendre rule

solution

$$I = \frac{5}{9}\left(\sinh\left(-\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right)^2\right) + \frac{8}{9}\sinh(0)^2 + \frac{5}{9}\left(\sinh\left(\sqrt{\tfrac{3}{5}}\right)^2\right) = ✓✓$$

* Transformation of the intervals:

اذا كان رأس المسألة حدود التكامل فيها ليست من 1- إلى 1 ، وكان من a إلى b فاحاول

إيجاد تعويض تحول التكامل على الصورة القياسية

$$\int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \int_{-1}^{1} g(z)\,dz$$

$(a,b) \rightarrow (-1,1)$

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{z-(-1)}{1-(-1)}$$

$$(x-a) = \frac{1}{2}(z+1)(b-a)$$

$$\boxed{\therefore\ x = \frac{1}{2}(z+1)(b-a) + a}$$

at $x=a \rightarrow z=-1$

at $x=b \rightarrow z=1$

$$\boxed{dx = \frac{b-a}{2}\,dz}$$

ex. Evaluate by Gauss-Legendre 2-point $\int_0^1 (7+14x^6)\,dx$

solution

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{z+1}{2} \qquad x = \frac{1}{2}(z+1) \ , \ dx = \frac{1}{2}dz$$

$(0,1) \rightarrow (-1,1)$

$$I = \int_{-1}^{1} \left[7 + 14\left(\tfrac{1}{2}(z+1)\right)^6\right] * \frac{1}{2}\,dz = w_0 f(z_0) + w_1 f(z_1)$$

$w_0 = 1 \ , \ w_1 = 1 \qquad z_0 = \frac{-1}{\sqrt{3}} \ , \ z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$I = 1\left[\frac{1}{2}\left(7 + 14\left(\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}+1\right)\right)^6\right) + \frac{1}{2}\left(7 + 14\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)\right)^6\right)\right]$$

$= ✓✓$

ⓘ Numerical Solution of Ordinary Differential Eqn (O.D.E) :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad ; \; y(x_0) = y_0 \rightarrow \text{Initial Condition}$$

① Taylor Method :

$$y(x_0 + h) = y_0 + \frac{h}{1!} y_0' + \frac{h^2}{2!} y_0'' + \dots$$

Ex. Use taylor's expansion to find $y(0.2)$ from
$y' = 2x - 2 \; ; \; y(0) = 1$

Solution

$y(0) = 1 \qquad x_0 = 0 \quad , y_0 = 1$

$y(x_0 + h) = y_0 + \frac{h}{1} y_0' + \frac{h^2}{2!} y_0''$

$y' = 2x - y \longrightarrow y_0' = 2x_0 - y_0 = -1$

$y'' = 2 - y' \longrightarrow y_0'' = 2 - y_0' = 3$

$y(0.2) \simeq 1 + (0.2 * -1) + \frac{(0.2)^2}{2!}(3) \simeq$ ✓✓

② Taylor Approximation Method :

$y(x_0 + h) = y(x_0) + \frac{h}{1!} y'(x_0) + \frac{h^2}{2!} y''(x_0) + \dots$

$y_1 \simeq y_0 + h y_0' + \frac{h^2}{2!} y_0'' + \dots$

$y_2 \simeq y_1 + h y_1' + \frac{h^2}{2!} y_1'' + \dots$

$\vdots$

$y_{n+1} = y_n + h y_n' + \frac{h^2}{2!} y_n'' + \dots$

$y' = f(x, y) \qquad y_n' = f(x_n, y_n) \rightarrow$ on y_{n+1}

$$y_{n+1} = y_n + h \underbrace{\left[f(x_n, y_n) + \frac{h}{2!} f'(x_n, y_n) + \frac{h^2}{3!} f''(x_n, y_n) + \dots \right]}_{T^{(n)}(x, y)}$$

- تعتمد هذه الفكرة على تقسيم قانون taylor العادي إلى خطوات حتى نصل إلى الخطوة n+1 بدلالة y_n ثم نعوض عن قيم y', y'', ... بدلالة الـ f من رأس المعادلة
- نترك الحد الأول ثم نأخذ h مشترك من باقي الحدود

(*) ~~Taylor~~ 2^{nd} Order Taylor Approximation:

$$y_{n+1} = y_n + h\,T^{(2)}(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left[f(x_n, y_n) + \frac{h}{2!} f'(x_n, y_n)\right]$$

(*) 3^{rd} Order Taylor Approximation:

$$y_{n+1} = y_n + h\,T^{(3)}(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left[f(x_n, y_n) + \frac{h}{2!} f'(x_n, y_n) + \frac{h^2}{3!} f''(x_n, y_n)\right]$$

ex) Find approximation solution of $y' = x - y + 1$, $0 \leq x \leq 0.4$ using taylor method of 2^{nd} order using $h = 0.2$; $y(0) = 0$

solution:

$$y_{n+1} = y_0 + h\,T^{(2)}(x_n, y_n) = y_0 + h\left[f(x_n, y_n) + \frac{h}{2!} f'(x_n, y_n)\right]$$

$$y' = f(x, y) \qquad , f(x_n, y_n) = x_n - y_n + 1$$

$$y'' = 1 - y' = 1 - x + y - 1 = y - x$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left[x_n - y_{n+1}\right] + \frac{h^2}{2!}(y_n - x_n)$$

→ at $n = 0$:

$$y_1 = y_0 + h(x_0 - y_0 + 1) + \frac{h^2}{2!}(y_0 - x_0) = 0.2$$

→ at $n = 1$

$$y_2 = y_1 + h(x_1 - y_1 + 1) + \frac{h^2}{2!}(y_1 - x_1)$$

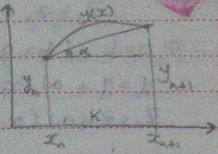
$$= 0.2 + (0.2 * 1) + \left(\frac{(0.2)^2}{2} * 0\right) = 0.2$$

K.M.S

LEC 11 Numerical

* Euler's Method for O.D.E :

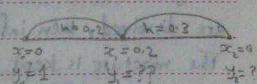
$y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, $\tan\alpha = y'\Big|_{(x_n, y_n)}$.



$\therefore \dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(x_n, y_n)$ $\therefore$ $y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$

ex: Use euler's method to find $y(0.2)$ & $y(0.5)$ for $y' = x + 2y$, $y(0) = 1$

Solution



$\because y(0) = 1$ $\therefore x_0 = 0$, $y_0 = 1$

$y_{n+1} = y_n + h(x_n + 2y_n)$

$\Rightarrow n = 0$; $h = 0.2$:

$y_1 = y_0 + 0.2(x_0 + 2y_0) = 1.4$

$\Rightarrow n = 1$; $h = 0.3$:

$y_2 = y_1 + 0.3(x_1 + 2y_1) = 1.88$

* Solution of systems of O.D. Eqns using Euler's Method:

لتعيين حل لإحدى مجموعة من المعادلات التي تحتوي على تفاضلات ويكون الحل يحقق لكل المعادلات

$\dfrac{dy}{dx} = f(x,y,z)$, $\dfrac{dz}{dx} = g(x,y,z)$, $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$

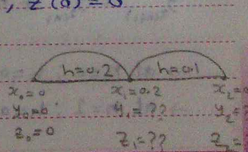
$\therefore y_{n+1} = y_n + h\,f(x_n, y_n, z_n)$

$, z_{n+1} = z_n + h\,g(x_n, y_n, z_n)$

ex: Find $y(0.2)$, $z(0.2)$, $y(0.3)$, $z(0.3)$ for :

$y' = x + y + 1$, $z' = x - z$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$

Solution



$y_{n+1} = y_n + h(x_n + y_n + 1)$

$z_{n+1} = z_n + h(x_n - z_n)$

$\Rightarrow n=0 \; ; h=0.2$:

$y_1 = y_0 + 0.2\,(x_0 + y_0 + 1) = 0.2 \Rightarrow y(0.2) = 0.2$

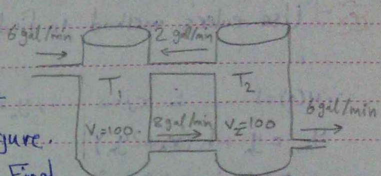
$Z_1 = Z_0 + 0.2\,(x_0 - Z_0) = 0 \Rightarrow Z(0.2) = 0$

$\Rightarrow n=1 \; ; h=0.1$:

$y_2 = y_1 + 0.1\,(x_1 + y_1 + 1) = 0.34 \Rightarrow y(0.3) = 0.34$

$Z_2 = Z_1 + 0.1\,(x_1 - Z_1) = 0.02 \Rightarrow Z(0.3) = 0.02$

Ex: Tank T_1 contains initially 100 gal of pure water and tank T_2 contains initially 100 gal of water in which 150 lb of salt are disvolved, then inflow and outflow as figure. The mixture is kept uniform by stirring. Find the salts contents $y_1(0.6)$ & $y_2(0.6)$ in T_1 & T_2 ; $h=0.2$



solution

نفرض أن $y_1(t)$ هو تركيز الملح بالخزان T_1 و $y_2(t)$ هو تركيز الملح بالخزان T_2

معدل تغير التركيز = التركيز الداخل - التركيز الخارج (inflow - outflow)

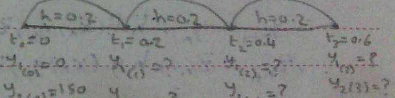
$$\frac{dy_1}{dt} = \underbrace{6 + \left(\frac{2}{V_2} * y_2\right)}_{\text{inflow}} - \underbrace{\left(\frac{8}{V_1} * y_1\right)}_{\text{out flow}}$$

عشان ميه نقية — عشان ميه فيها ملح: تركيز الملح * الحجم الداخل / الحجم الكلي

لو زودنا عدد الخزانات نزود لكل خزان معادلة

$$\frac{dy_2}{dt} = \left(\frac{8}{V_1} * y_1\right) - \left(\frac{8}{V_2} * y_2\right)$$

تركيز الملح في الخزان



$y_1(0) = 0 \quad , y_2(0) = 150$

$y_{1(n+1)} = y_{1(n)} + h\,(6 + 0.02\,y_{2(n)} - 0.08\,y_{1(n)})$

$y_{2(n+1)} = y_{2(n)} + h\,(0.08\,y_{1(n)} - 0.08\,y_{2(n)})$

$\rightarrow$ at $n=0$; $h=0.2$: $y_{1(1)} = 1.8 \quad , y_{2(1)} = 147.6$

$\rightarrow$ at $n=1$; $h=0.2$: $y_{1(2)} = 3.5616 \quad , y_{2(2)} = 145.2672$

K.M.S

→ at $n=3$; $h=0.2$: $y_{1(3)} = 5.2857$, $y_{2(3)} = 142.99991$

← لو عايز اعرف كام خطوة عشان التركيز = صفر (الملح برا الخزانين) نفس خطوة h مش عارفها و n مش عارفها وبعد كده من الخطوات بقى عندنا معادلتين في مجهولين h و n فنحط $y_1 = y_2 = 0$ ونطلع قيم n و h حيث $h = \frac{K}{n}$ $\frac{\text{المسافة}}{\text{عدد التقسيمات}}$ الخطوة

⊡ The Higher Derivatives eqn:

الفكرة أن نحاول حل المعادلات التفاضلية التي تحتوي على تفاضل أعلى باستخدام قاعدة Euler

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y') \qquad , \; y(x_0) = y_0 \qquad , \; y'(x_0) = y'_0$$

put $y' = Z$ $\qquad \therefore Z' = f(x, y, Z)$

for y''' put $Z' = w$ $\qquad w' = Z'' = y''' = f(x, y, y'') = f(x, y, w)$

$$y' = Z \qquad , \; Z' = f(x, y, Z)$$

$$y_{n+1} = y_n + h(Z_n) \qquad Z_{n+1} = Z_n + h\, f(x_n, y_n, Z_n)$$

ex. Find the current $I(t)$ at $t = 0.6$ in RLC-circuit with $R = 11\,\Omega$, $L = 0.1$, $C = 10^{-2}$ F which is connected to a voltage source $E(t) = 100 \sin 400t$. Assume that currents and charges $= 0$ when $t = 0$; $h = 0.2$

solution

Applying Kirchoff : $V_R + V_c + V_L = E(t)$

$$\therefore R I(t) + \frac{q}{c} + L \frac{dI}{dt} = E(t) \qquad I = \frac{dq}{dt} \quad \therefore q = \int I(t)\, dt$$

$$\therefore R I(t) + \frac{1}{c} \int I(t)\, dt + L \frac{dI}{dt} = 100 \sin 400t$$ بالتفاضل

$$L I''(t) + R I'(t) + \frac{1}{c} I(t) = 4 * 10^4 \cos 400t$$

$$\therefore I''(t) + \frac{R}{L} I'(t) + \frac{1}{LC} I(t) = 4 * 10^5 \cos 400t$$

$$\frac{R}{L} = 110 \quad , \; \frac{1}{LC} = 10^3 \qquad \text{Let } I' = Z$$

$$\therefore Z' = I'' = 4 * 10^5 \cos 400t - 110 I' - 10^3 I$$

$$I(0) = 0 \qquad , \; I'(0) = 0$$

$$\vec{Z} = 4 \times 10^5 \cos 400t - 110 Z - 10^3 I$$

$$I_{n+1} = I_n + h Z_n$$

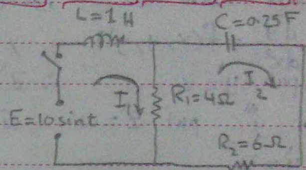
$$Z_{n+1} = Z_n + h \left[4 \times 10^5 \cos 400 t_n - 110 Z_n - 10^3 I_n \right]$$

$\rightarrow$ at $n=0$; $h=0.2$: $I_1 = \checkmark$, $Z_1 = \checkmark$

$\rightarrow$ at $n=1$; $h=0.2$: $I_2 = \checkmark$, $Z_2 = \checkmark$

$\rightarrow$ at $n=2$; $h=0.2$: $I_3 = \checkmark$, $Z_3 = \checkmark$

Ex. 3 Find $I_1(0.6)$ & $I_2(0.6)$ assuming that all currents and charges $= 0$ at $t=0$



solution

Kirchoff in 2 loops :

$$L \frac{dI}{dt} + R_1 (I_1 - I_2) = 10 \sin t$$

$$\frac{1}{c} \int I_2 + R_2 I_2 + R_1 (I_2 - I_1) = 0$$

$$I_1' + 4 I_1 - 4 I_2 = 10 \sin t \quad \therefore I_1' = 4 I_2 - 4 I_1 + 10 \sin t \quad \text{①}$$

$$4 I_2 + 6 I_2' + 4 I_2' - 4 I_1' = 0 \quad \text{②}$$

From ① in ② :

$$I_2' = -1.6 I_1 + 1.2 I_2 + 4 \sin t$$

From Euler using $h = 0.3$

$$I_{1(n+1)} = I_{1(n)} + 0.3 \left(-4 I_{1(n)} + 4 I_{2(n)} + 10 \sin t_n \right)$$

$$I_{2(n+1)} = I_{2(n)} + 0.3 \left(-1.6 I_{1(n)} + 1.2 I_{2(n)} + 4 \sin t_n \right)$$

$\rightarrow$ at $n=0$; $h=0.3$ $I_{1(1)} = \checkmark$ $I_{2(1)} = \checkmark$

$\rightarrow$ at $n=1$; $h=0.3$ $I_{1(2)} = \checkmark$ $I_{2(2)} = \checkmark$

Adam-Bash Mouton Method:

$y' = f(x, y) \quad ; y(x_0) = y_0$ multi-steps method.

ex Deduce Adams-Bashforth method using Newton's Backward for:

a) Adams-Bash forth two steps method

b) Adams-Bash forth three steps method.

c) Adams-Bashforth four steps method.

solution

$y' = f(x, y) \quad ; y(x_0) = y_0$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y' \, dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y) \, dx$$

في الامتحان هيطلب الخطوتين دول عشان الحل

$$\therefore y_{n+1} - y_n = \int_n f(x, y) \, dx$$

$x = x_0 + nh \quad , dx = h \, dn$

$$y_{n+1} = y_n + h \int_n f(x_n, y_n) \, dn$$

⇒ from Newton's Backward:

$$f \simeq f_n + n \nabla f_n + \frac{n(n+1)}{2!} \nabla^2 f_n + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} \nabla^3 f_n + \text{——}$$

بالتعويض داخل التكامل على الفترة من 0 إلى 1 :

$$y_{n+1} = y_n + h \Big[n f_n + \frac{n^2}{2} \nabla f_n + \frac{1}{2}\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2}\right) \nabla^2 f_n + \frac{1}{6}\left(\frac{n^4}{4} + \frac{3n^3}{2} + 2n\right) \nabla^3 f_n + \text{——} \Big]_0^1$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left[f_n + \frac{1}{2} \nabla f_n + \frac{5}{12} \nabla^2 f_n + \frac{3}{8} \nabla^3 f_n + \text{——} \right] \text{——} (*)$$

$\nabla f_n = f_n - f_{n-1}$

$\nabla^2 f_n = f_n - 2 f_{n-1} + f_{n-2}$

$\nabla^3 f_n = f_n - 3 f_{n-1} - 3 f_{n-2} - f_{n-3}$

a) Adams-Bashforth two steps:

نأخذ أول حدين من المعادلة (*) ونعوض عن قيم ∇

$$y_{n+1} = y_n + h\left[f_n + \frac{1}{2}\nabla f_n\right]$$

$$= y_n + h\left[f(x_n, y_n) + \frac{1}{2}\left[f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})\right]\right]$$

$$\therefore y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[3f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})\right] \Rightarrow \text{أول قانون}$$

لكن كل المسائل بهذه الطريقة نوجد أول خطوة أي نحسب y_1 باستخدام Euler

وبداية الـ n لهذا القانون $n = 1, 2, \dots, n-1$

b) Adams-Bashforth three steps:

نأخذ أول ٣ حدود من المعادلة (*) ونعوض عن قيم ∇, ∇^2

$$y_{n+1} = y_n + h\left[f_n + \frac{1}{2}\nabla f_n + \frac{5}{12}\nabla^2 f_n\right] \quad (**)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\left[23 f(x_n, y_n) - 16 f(x_{n-1}, y_{n-1}) + \frac{5}{12} f(x_{n-2}, y_{n-2})\right] \Rightarrow \text{ثاني قانون}$$

$, n = 2, 3, 4, \dots$

← يعطى في رأس المسألة قيمة y_0 حتى نعوض في هذا القانون y_1 و y_2 بطريقة Euler ثم نكمل الحل في قانون Adams

← يفضل في مسائل 3,4 point الحل بالقانون (**)

c) Adams-Bashforth four steps:

$$y_{n+1} = y_n + h\left[f_n + \frac{1}{2}\nabla f_n + \frac{5}{12}\nabla^2 f_n + \frac{3}{8}\nabla^3 f_n\right) \quad (***)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left[55 f(x_n, y_n) - 59 f(x_{n-1}, y_{n-1}) + 37 f(x_{n-2}, y_{n-2}) - 9 f(x_{n-3}, y_{n-3})\right] \Rightarrow \text{ثالث قانون}$$

$, n = 3, 4, \dots, n-1$

لابد من حساب y_1, y_2, y_3 بـ Euler ثم نكمل الحل باستخدام Adams ويفضل استخدام القانون (***)

ex. Use Adams - Bashforth two-steps method for :

$y' = x + y \quad ; y(0) = 1 \quad , h = 0.1 \quad$ to find $y(0.2)$

solution

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[3f(x_n, y_n) - f(x_{n-1}, y_{n-1})\right] \quad , n = 1, 2, \dots, n-1$$

نحسب خطوة واحدة بـ Euler

$y' = x + y \quad ; y(0) = 1$

$y_{n+1} = y_n + h(x_n + y_n) \quad ; x_0 = 0 \quad ; y_0 = 1$

→ $n = 0$:

$y_1 = y_0 + 0.1(x_0 + y_0) = 1.1$

→ $n = 1$:

$y_2 = y_1 + \frac{0.1}{2}\left[3f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)\right] \quad ; f(x, y) = x + y$

$y_2 = 1.1 + \frac{0.1}{2}\left[3(0.1 + 1.1) - (0 + 1)\right] \quad \therefore y(0.2) = y_2$

ex. Use Adams - Bashforth four steps method to solve

$y' = x + y \quad ; y(0) = 1 \quad , h = 0.1$ to find $y(0.4)$

solution

$$\therefore y_{n+1} = y_n + h\left[f_n + \frac{1}{2}\nabla f_n + \frac{5}{12}\nabla^2 f_n + \frac{3}{8}\nabla^3 f_n\right] \quad , n = 3, 4, 5, \dots, n-$$

نحسب y_1, y_2, y_3 من Euler

$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$

$= y_n + 0.1(x_n + y_n) \quad , n = 0, 1, 2$

→ $n = 0$:

$y_1 = y_0 + 0.1(x_0 + y_0) = 1.1$

→ $n = 1$:

$y_2 = y_1 + 0.1(x_1 + y_1) = 1.3$

→ $n = 2$:

$y_3 = y_2 + 0.1(x_2 + y_2) = 1.39972$

x_i	y_i	$f(x_n, y_n) = x_n + y_n$	∇f	$\nabla^2 f$	$\nabla^3 f$
0	1	1			
0.1	1.1	1.2	0.2	0.1	
0.2	1.3	1.5	0.3	-0.1	-0.2
0.3	1.39972	1.69972	0.19973		

$$y_4 = 1.39972 + 0.1\left[1.69 + \left(\frac{1}{2} * 0.19\right) + \left(\frac{5}{2} * -0.1\right) + \left(\frac{3}{8} * -0.2\right)\right]$$

$$= y(0.4)$$

Solution of P.D.E by finite difference:

1) $u(x+h, y) = u(x,y) + h\, u_x(x,y) + \frac{h^2}{2!} u_{xx}(x,y) + \text{---}$

2) $u(x-h, y) = u(x,y) - h\, u_x(x,y) + \frac{h^2}{2!} u_{xx}(x,y) + \text{---}$

3) $u(x, y+k) = u(x,y) + k\, u_y(x,y) + \frac{k^2}{2!} u_{yy}(x,y) + \text{---}$

[illegible] Taylor لتعيين قيم القوانين فإذا طرحنا في المعادلة [illegible]

[illegible]

$$u_x = \frac{u(x+h, y) - u(x,y)}{h}$$

[illegible]

$$u_y = \frac{u(x, y+k) - u(x,y)}{k}$$

بجمع 1 و 2 ينتج

$$u_{xx} = \frac{1}{h^2}\left[u(x+h, y) + u(x-h, y) - 2u(x,y)\right]$$

[illegible]

$$u_{yy} = \frac{1}{k^2}\left[u(x, y+k) + u(x, y-k) - 2u(x,y)\right]$$

K.M.S

اذا ظهر تفاضلات مع الشروط في رأس المسألة نعوض عن :

$$u_x = \frac{u(x+h,y) - u(x-h,y)}{2h} \quad , \quad u_y = \frac{u(x,y+k) - u(x,y-k)}{2k}$$

[*] One Dimention Heat eqn :

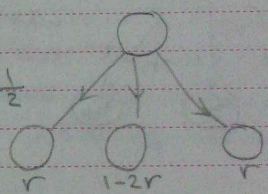
المشكلة المراد حلها هي معرفة درجات الحرارة على سلك بدون استخدام أدوات قياس عند أي نقطة على السلك وبعد أي زمن حيث أن المعادلة الهندسية التي تعبر عن هذه الظاهرة الهندسية هي : $u_t = a^2 u_{xx}$

حيث أن $u(x,t)$ هي درجة الحرارة عند أي نقطة على السلك x وأي زمن t

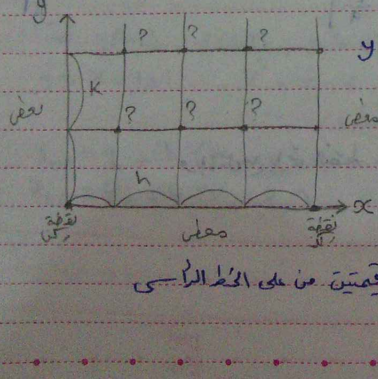
عند تسخين السلك بدرجة حرارة ابتدائية $u(x,0) = f(x)$ وشروط عند أول السلك وآخر السلك Boundary Conditions :

$u(0,t) = a \quad , \quad u(L,t) = b$

$$r = \frac{a^2 k}{h^2} < \frac{1}{2}$$



$$u_{i,j+1} = r\, u_{i+1,j} + (1-2r)\, u_{i,j} + r\, u_{i-1,j}$$



لحل مسألة الـ Heat equation نتبع الخطوات :

1) نقسم محور السينات بخطوة طولها h ونقسم محور y بخطوة طولها k ومنها تكون شبكة

2) يعطى في رأس المسألة الشروط عند حدود الشبكة والمطلوب تعيين قيمة الـ u عند النقط الداخلية مع العلم أن الشبكة مفتوحة من أعلى.

← ((نحسب الشبكة من أسفل لأعلى))

← في نقط الأركان اذا أخذت النقطة قيمتين من على الخط الرأسي والأفقي نأخذ المتوسط

ex: Solve one dimension heat equation:

$u_t = u_{xx}$; $0 \leq x \leq 1$; $t \geq 0$

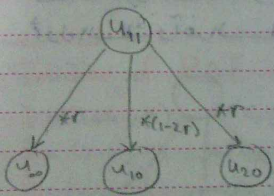
$u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$; $u(x,0) = x(1-x)$

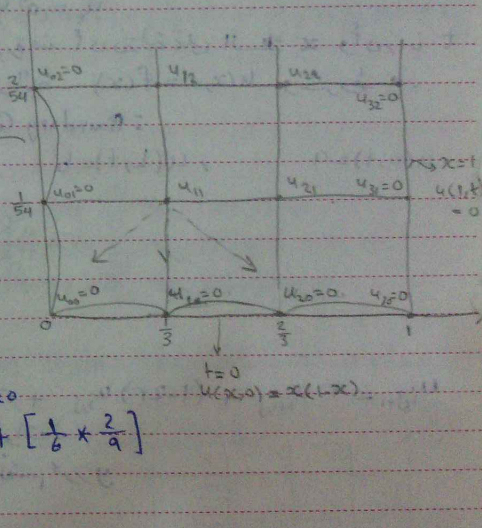
$h = \frac{1}{3}$; $K = \frac{1}{54}$

solution

$u_t = a^2 u_{xx}$ $\therefore a^2 = 1$ $\therefore a = 1$

$r = \frac{a^2 K}{h^2} = \frac{1 * \frac{1}{54}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{6} < \frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ لو ماعطاش h, K افرضهم بحيث يطلع $r < \frac{1}{2}$





$u_{11} = r u_{00} + (1-2r) u_{10} + r u_{20}$

$\quad = \left(\frac{1}{6} * 0\right) + \left[\left(1 - \frac{2}{6}\right) * \frac{2}{9}\right] + \left[\frac{1}{6} * \frac{2}{9}\right]$

$\quad = \frac{10}{54}$

وبالمثل مع باقي النقط صف صف من تحت لفوق.

Made by: 

Ibrahim Ahmed